

LA DEUXIÈME MÉTHODE POUR L'INSTABILITÉ DISCRÈTE

MARIA PREDOI

Résumé

En suivant les idées de [Balan et al. 2003], on définit le dual de la fonction Lyapunov classique, qui se base sur les structures horistologiques. On va démontrer que l'existence d'une telle fonction assure l'instabilité discrète d'un système dynamique en $\mathbb{R}^n$.

AMS Subject Classification : 93D05, 47B50

Key words : Fonctions Lyapunov, instabilité discrète, super-additivité, Horistologie.

1. Introduction

On considère un système dynamique lisse, décrit par les équations différentielles

$$x' = f(x), \quad (1)$$

où $x : T = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente l'état du system et f est tel que la condition initiale, i.e. $x(0) = x_0$, détermine de manière unique l'évolution x (voir [1], etc.). Autrement dit, la fonction *état initial - évolution* $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^T$ est bien définie, ainsi que $x = \Psi(x_0)$ c'est une notation plus simple pour la correspondance $x_0 \mapsto x(t, x_0)$. Si on suppose $f(0) = 0$, alors $x = 0$ c'est une solution de (1), qui correspond à une valeur initiale nulle $x_0 = 0$. Comme d'habitude, notre présent étude sur (in)stabilité prend en compte cette solution.

Il est connu que la stabilité au sens Lyapunov se réduit à la continuité de la fonction Ψ en 0 (voir [3], [5], [4], etc.). Ainsi, il est dépendent de quelques structures topologiques particuliers (metric, normées, etc.), qui sont définies sur l'espace $\mathbb{R}^n$ des états initiales, et sur l'espace $(\mathbb{R}^n)^T$ des évolutions. La deuxième méthode utilise une fonction Lyapunov $L : V \rightarrow \mathbb{R}$, où V c'est un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, qui est caractérisée par les conditions :

- [L1] L est continue dans $0 \in \mathbb{R}^n$;
- [L2] L est positivement définie sur V ;
- [L3] La fonction $L^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est décroissante, où $L^*(t) = L(x(t, x_0)) = L(\Psi(x_0)(t))$.

En dualité avec la notion de stabilité, on a récemment introduit une variante de l'instabilité, dite discrète (voir [2]). Le caractère dual de ces notions suit du fait que les structures topologiques sont remplacées par les structures horistologiques et la continuité de la fonction Ψ est remplacée par la discrétitude. Ainsi, dans les espaces linéaires on va remplacer les normes et les métriques usuelles (c'est-à-dire sub-additive) par leur super-additive paires (voir [2] et les références incluses).

2. Instabilité discrète

Soit K un ordre linéaire de $\mathbb{R}^n$, et soit $K[0]$ le cône des vecteurs positifs relative à K . La fonctionnelle $\neg \cdot \vdash : K \rightarrow \mathbb{R}_+$ est dite *norme super-additive* (en bref S.a.) si et seulement si :

- [S1] $\neg x \vdash = 0$ si et seulement si $x = 0$;
- [S2] $\neg \lambda x \vdash = \lambda \neg x \vdash$ pour tous les $\lambda > 0$ et $x \in K[0]$;
- [S3] $\neg x + y \vdash \geq \neg x \vdash + \neg y \vdash$ pour tous les points $x, y \in K[0]$.

En utilisant $\neg \cdot \vdash$, on définit une horistologie χ sur $\mathbb{R}^n$, qui attaches à chaque point $x \in \mathbb{R}^n$ une famille de *perspectives*, c'est-à-dire

$$\chi(x) = \{U \subset \mathbb{R}^n : \exists r > 0 \text{ tel que } U \subseteq H(x, r)\},$$

où $H(x, r)$ sont les *perspectives hyperboliques*, $H(x, r) = \{y \in K[x] : \neg y - x \vdash \geq r\}$.

On peut étendre cette structure à une autre structure horistologique, notée ξ , sur l'ensemble $(\mathbb{R}^n)^T$ des évolutions, qui utilise la S.a. norme $\neg |x| \vdash = \inf\{\neg x(t) \vdash : t \geq 0\}$. La $\chi - \xi$ instabilité discrète de l'évolution nulle de (1) signifie que la fonction Ψ est discrète à 0, i.e.

$$\forall_{\delta > 0} \exists_{\varepsilon > 0} \text{ tel que } \neg x_0 \vdash \geq \delta \implies \neg |x| \vdash \geq \varepsilon.$$

3. Fonctions échelles

On désire introduire une fonction Lyapunov discrète qui est dual avec L . On va définir avant une classe particulière des fonctions, qui nous permet de construire l'analogue horistologique des fonctions échelles de la théorie classique de Lyapunov. On définit une classe $\mathcal{D}$, des fonctions $D : K[0] \rightarrow \mathbb{R}$, pour lesquelles sont vérifiées les conditions suivants :

- [D1] D est discrète sur $K[0]$ relativement à χ et à la horistologie naturelle sur $\mathbb{R}$;
- [D2] D est *graduellement bornée*, i.e. pour chaque $r > 0$ il existe un $x(r) \in K[0]$, $\neg x(r) \vdash \leq r$, tel que

$$D(x(r)) = \max\{D(x) : x \in K[0], \neg x \vdash \leq r\};$$

- [D3] $D(0) = 0 = \inf\{D(x(r)) : r > 0\}$.

D'après [D1] et [D3] on obtient que D est positivement définie sur $K[0]$, c'est-à-dire $D(x) > 0$, pour chaque $x \in K[0] \setminus \{0\}$, et $D(0) = 0$. On peut reformuler la condition [D2] en utilisant des termes de bornetude usuelle sur des ensembles particuliers. Soit l'ensemble

$$S(0, r) = \{x \in K[0] : \neg x \vdash \leq r\},$$

où $r \in \mathbb{R}$, dit *r-tranche*. La bornitude graduelle de D signifie qu'elle est bornée sur chaque *r-tranche*, et le suprême de D sur $S(0, r)$ est réalisée pour un $x(r)$.

Si $D \in \mathcal{D}$, alors la fonction $\omega_D : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, de valeurs $\omega_D(r) = D(x(r))$, est dite *échelle hyperbolique* attachée à D . Par exemple, si nous considérons $D = k \cdot \vdash$, où $k > 0$ est fixée, alors l'échelle hyperbolique attachée est linéaire, c'est-à-dire $\omega_D(r) = kr$.

4. Proposition *Pour toutes $D \in \mathcal{D}$, les échelles hyperboliques attachées ω_D ont les propriétés suivantes :*

- (i) $\omega_D(\vdash x) \geq D(x)$ en chaque point $x \in K[0]$;
- (ii) ω_D est strictement croissante (et par consequence discrète relative au horistologie naturelle sur $\mathbb{R}$) ;
- (iii) $\omega_D(0) = 0 = \inf\{\omega_D(r) : r > 0\}$.

Démonstration. (i) Pour chaque $x \in K[0]$ on note $r = \vdash x$, et on observe que $x \in S(0, r)$. En particulier, si $x = 0$, alors $r = 0$, et $S(0, 0) = \{0\}$.

(ii) On doit montrer que $0 \leq r_1 < r_2$ implique $\omega_D(r_1) < \omega_D(r_2)$. En effet, soit $x_1 = x(r_1) \in S(0, r_1)$ un point où $D(x_1) = \max\{D(x) : x \in S(0, r_1)\}$. La discrétitude de D dans le point x_1 signifie que pour tout $\delta > 0$ on peut trouver un $\varepsilon > 0$, tel que l'inégalité $D(x) > D(x_1) + \varepsilon$ est vraie pour $\vdash x - x_1 \vdash \geq \delta$. Autrement dit, $\vdash x - x_1 \vdash \geq \delta$ implique $D(x) \geq \omega_D(r_1) + \varepsilon$. Il faut choisir δ tel que $H(x_1, \delta) \cap S(0, r_2) \neq \emptyset$.

Dans la horistologie naturelle sur $\mathbb{R}$ on a $\vdash x \vdash = x$, ainsi que la monotonie stricte de ω_D implique son discrétitude.

(iii) C'est une reformulation de [D3]. $\square$

5. Fonctions Lyapunov discrètes

Chaque paire, constituée d'une évolution $x(t, x_0)$ de (1) et une fonction $D \in \mathcal{D}$, détermine une fonction $D^* : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, de valeurs $D^*(t) = D(x(t, x_0))$. Par dualité à L , on dit que D est une *fonction Lyapunov discrète* de (1) si est seulement si :

[DL] La fonction D^* est croissante.

6. Exemple Si on met $n = 1$ et $A = (a)$ dans (1), alors chaque état initial $x_0 \geq 0$ continue par une évolution de la forme $x(t, x_0) = x_0 \exp(at)$. Si $D = k \cdot \vdash$, comme avant, pour un $k > 0$, alors

$$D^*(t) = k x(t, x_0) = k x_0 \exp(at).$$

Evidemment, $D \in \mathcal{D}$. D'autre côté, si $a > 0$, alors la fonction D^* est croissante, ainsi que D est une fonction Lyapunov discrète du system particulier (1).

7. Théorème. *Si (1) a une fonction Lyapunov discrète, alors son évolution nulle est discrètement instable.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, on a

$$\omega_D(\vdash x(t, x_0) \vdash) \geq D(x(t, x_0)). \quad (2)$$

Comme D^* est croissante, on obtient que

$$D(x(t, x_0)) = D^*(t) \geq D^*(0) = D(x_0). \quad (3)$$

Finalement, comme D est discrète, pour chaque $\delta > 0$ il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\neg x_0 \vdash \geq \delta$ implique

$$D(x_0) \geq \varepsilon. \quad (4)$$

Par transitivité, d'après (2), (3) et (4) on déduit que

$$\omega_D(\neg x(t, x_0) \vdash) \geq \varepsilon \quad (5)$$

est vraie, étant une conséquence de $\neg x(t, x_0) \vdash \geq \delta$. D'après (iii), soit $\rho > 0$ un point où $\omega_D(\rho)$ est vraie. De (5) on déduit l'inégalité

$$\omega_D(\neg x(t, x_0) \vdash) \geq \omega_D(\rho). \quad (6)$$

Parce que ω_D est strictement croissante, elle est inversable sur l'ensemble des images, et son inverse est aussi croissante, ainsi que l'inégalité (6) conduit à

$$\neg x(t, x_0) \vdash \geq \rho, \quad (7)$$

où $t \geq 0$ est arbitraire. En utilisant la norme $\neg \|\cdot\|$, appliquée à $x(t, x_0) = \Psi(x_0)(t)$, l'inégalité (7) devient

$$\neg \|\Psi(x_0)\| \geq \rho.$$

En conclusion, on peut dire que pour chaque $\delta > 0$ il existe $\rho > 0$ tel que $\neg x_0 \vdash \geq \delta$ implique

$$\neg \|\Psi(x_0)\| \geq \rho,$$

c'est-à-dire Ψ est discrète en 0. $\square$

En utilisant ce théorème, on peut immédiatement établir que l'évolution nulle du système particulier (1), qu'on a considéré dans l'exemple 6 ci-dessus, est discrètement instable (comparer avec [2]).

Références

- [1] Barbu Viorel, *Ecuații diferențiale*, Editura Junimea, Iași, 1985.
- [2] Bălan Trandafir, Predoi Maria, *Discrete Instability* (voir ce volume).
- [3] Mesarovic M.D., Takahara Y., *General Systems Theory - Mathematical Foundations*, Accad. Press, New York, San-Francisco, London, 1975.
- [4] Predoi Maria, *Funcții Lyapunov relativiste*, Anals Univ. Craiova, seria mat-fiz-chim, XVII (1989), 41-47.
- [5] Rasvan Vladimir, *Teoria stabilității*, Editura Stiintifică și Enciclopedică, București, 1987.

Author's address :

Maria Predoi
 Dept. de Math. Appl.,
 Univ. de Craiova,
 rue Al. I. Cuza 13,
 Craiova 200585, Roumanie
 E-mail : mpred@central.ucv.ro