M- ET QUASI M-HYPERGROUPES POLYSYMETRIQUES ET 1-HYPERGROUPES

Jean Mittas

Résumé

Having as starting point the M-polysymmetrical hyper-group, the quasi M-polysymmetrical hypergroup is defined and its identification with the 1-hypergroups, commutative and non commutátive respectively is proved in this paper, as well as that those hyperstructures which are closely related with the groups.

AMS Subject Classification : 20N20
Key words : hypergroup, heart of hypergroups (cœur d'hypergroupe)

1 Introduction

Dans ma note à l'Académie Française en 1970 [12] en partant d'un corps algébriquement clos et moyennant une hyperopération convenable définie sur lui, je me suis amené à l'introduction à deux classes de structures hyper-compositionnelles, ces qui ont été nomées beaucoup plus tard, en 1992, par Yatras, *M-hypergroupes polysymétriques et M-hyperanneaux polysymétriques* respectivement [15], [17]. Dans la note citée j'ai donné encore certaines propriétés fondamentales de ces hyperstructures en démontrant surtout leur lien étroit avec les groupes abeliens et les anneaux, tandis que Yatras les a étudiées au fond [13], [15], [16], [17]. Dans le présent travail on met d'abord en rapport les M-hypergroupes-polysymétriques avec les 1-hypergroupes, c'est-à-dire les hypergroupes dont leur cœur est un singleton [3] [4] [11] et, ensuite, on introduit une nouvelle hyperstructure, le *quasi M-hypergroupe polysymétrique.* On rapelle que le cœur d'un hypergroupe H est le plus petit au sens de l'inclusion sous-hypergroupe h de H, pour lequel l'ensemble H/h est un groupe. En ce qui concerne les M-hypergroupes polysymétriques on cite leur définition [12] [15] [17].

Définition 1 On appelle *M-hypergronpe polysymétrique* un ensemble H muni d'une hyperopération, notée de préférence additivement $x+y$ (en cause de sa liaison immédiate avec les M-hyperanneaux polysymétriques [12] [17]) vérifiant les axiomes :

Editor Gr.Tsagas *Proceedings of the Workshop on Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebras, 1994,* 47-55

– 1. $x+y=y+x$ pour tout $x, y \in H$.
– 2. $(x+y)+z=x+(y+z)$ pour tout $x, y, z \in H$.
– 3. $(\exists 0 \in H)$ $(\forall x \in H)$ $[x \in 0+x]$.
– 4. $(\forall x \in H)$ $(\exists x' \in H)$ $[x+x'=0]$[1].

Tout tel élément x' est un *opposé ou symétrique* de x par rapport à 0 considéré et leur ensemble $S(x)=\{x' \in H : x+x'=0\}$ est le symétrique (ensemble) de x.

– 5. Pour tout $x, y, z \in H$ et pour tout $x' \in S(x)$, $y' \in S(y)$, $z' \in S(z)$, si $z \in x+y$, alors $z' \in x'+y'$.

De la définition il résulte :
– i. $x+H=H$ pour tout $x \in H$, ce qui justifie la caractérisation de la structure comme hypergroupe et, par couséquent, on a $x+y \neq \emptyset$, quelque soient x, y dans H [4] [6] [7] [8].
– ii. L' unicité de 0-le *zéro* de H.
– iii. $S(0)=\{0\}$.

On cite encore de [12] le théorème suivant, étant indispensable pour la suite :

Théorème 1 *Les ensembles $C(x)=0+x$, quand x parcourt H, forment une partition de H et on a*

$$x+y=0+x+y=(0+x)+(0+y)\,.$$

De plus,. pour tout $x, y \in H$, l'hypersomme $x+y$ est une de classes de la partition et l'ensemble $G(H)=\{C(x);\ x \in H\}$ de ces classes est un groupe abelien par rapport à l'opération $C(x)+C(y)$, appelée groupe de réduction *de H (ou, simplement* groupe *de H ; voir encore [15] et [17]).*

Ensuite et après une étude relative il a résulté comme conclusion fondamentale *la construction de tous les M-hypergroupes polysymétriques, dont le groupe de réduction est isomorphe à un groupe abelien donné.*

Il faut encore noter que, comme il est évident, l'ensemble $\{0\}$ est un sous- hypergroupe de H (et même, un M-sous-hypergroupe polysymétrique de H, comme, d'ailleurs, tous ses sous-hypergroupes en sont tels de [16] [17]) et, par conséquent, son cœur ω_H et le groupe H/ω_H n' est que le groupe de réduction de H.

Passons, maintenant, au développement ultérieure du sujet.

2 Les 1-hypergroupes commutatifs et les M-hypergroupes polysymétriques

De précédents il se rend visible que *tout M-hypergroupe polysymétrique est un 1-hypergroupe commutatif.* Mais on va voir que le réciproque est aussi vrai.

Soit, en effet, $(H,+)$ un 1-hypergroupe commutatif, dont l'hyperopération est notée de même additivement (par analogie au cas précédent) et soit $\omega_H=\{a\}$, $a \in H$, son cœur. Comme il est connu de la théorie des 1- hypergroupes [3] [4] [11], les

[1] On identifie, quand rien ne s'y oppose, les éléments $x \in E$ et les singletons correspondants $\{x\}$. On écrit, donc, $x+x'=0$, au lieu de $\{0\}$.

hypersommes $a + x$ forment une partition de H (à ses $\beta*$ classes [4] [11] [14]) quand x le décrit et que H est régulier (complètement régulier au sens de Marty [9]) et revercible, dont a est son élément neutre, son *zéro*, noté 0 ($= a$) et on a $x \in 0 + x$, pour tout $x \in H$, car $\omega_H = \{0\}$ considéré comme sous-hypergroupe de H est inversible [2] [7] [8]. Quand aux *opposés* ou *symétriques* d'un $x \in H$ on a que, si $C(y) = 0+y$ est l'oppose de $C(x) = 0 + x$ dans le groupe H/ω_H (forcement abelien) appelé de même *groupe de réduction* de H, de $C(x) + C(y) = C(0) = \{0\}$, on a $x + x' = 0$ pour tout $x' \in C(y)$ et seulement pour de tels $x' \in H$. Par conséquent $C(y) = C(x') = S(x)$ est l' ensemble des opposés de x. Mais, en ce qui concerne les classes *mod* ω_H, on a généralement dans H/ω_H

$$C(x) + C(y) = C(z) \quad (\textit{une classe}),$$

donc

$$(0 + x) + (0 + y) = 0 + x + y = \bigcup_{w\in x+y} (0 + w) = 0 + z$$

et on voit que toutes les classes $0 + \omega$ de l'union $\cup_{w\in x+y}(0 + w)$ sont égales à $0 + z$ (étant évidemment $0 + \omega \subseteq 0 + z$). D'autre part, pour tout $x_1 \in C(x)$, $y_1 \in C(y)$, on a de même

$$(0 + x_1) + (0 + y_1) = 0 + x_1 + y_1 = \bigcup_{\omega\in x_1+y_1} (0 + \omega) = 0 + z$$

et, comme on a $x_1 + y_1 \ni \omega \Leftrightarrow \omega \in x + y$, on déduit que $x_1 + y_1 = x + y$. Ensuite, puisque $C(x)+C(y) = \cup_{x_1\in C(x),y_1\in C(y)}(x_1 +y_1) = x+y$, on a $x+y = 0+z$, c' est-à -dire l'hypersomme $x + y$ est pour tout $x, y \in H$ une des classes de la partition *mod* ω_H. Enfin, pour tout x, y, $z \in H$, $x' \in S(x)$, $y' \in S(y)$, $z' \in S(z)$, si $z \in x + y$, on a successivement $z + z' \subseteq z' + x + y$, $0 \in z' + x + y$, $0 + x' + y' \subseteq z' + x + y + x' + y'$, $x' + y' \subseteq 0 + z'$ et, d'après la conclusion précédente, $x' + y' = 0 + z'$, done $z' \in x' + y'$.

En conclusion on a que tous les axiomes de la définition I sont vérifiés et, par conséquent, on a le théorème très considerable :

Théorème 2 *Tout M-hypergroupe polysymétrique est un 1-hypergronpe commutatif et réciproquenent.*

Il résulte donc que, comme les notions du M-hypergroupe polysymétrique et de l' 1-hypergroupe commutatif sont identiques, toute propriété se rapportant à l'une d' elles, elle est valable pour l' autre. Ainsi la classe considérable des 1-hypergroupes est enrichie par des propriétés qui ont résulté de l' étude particulière des M-hypergroupes polysymétriques. Comme exemples indicatifs nous rapportons les suivants (où, évidemment, on a pose 1-hypergroupe au lieu de M-hypergroupe polysymétrique) [15] [16] [17] :

Proposition 1 *Tout 1-hypergroupe commutatif est un hypergroupe joint (join space).*

Proposition 2 *Dans tout 1-hypergroupe commutatif* $(H, +)$ *il existe un sous-ensemble* $\hat{G}$ *de* H *muni de structure de groupe abelien ayant comme élément neutre le zéro (cœur) de* H *et qui est isomorphe à* $G \equiv H/\omega_H$ *-groupe de réduction de* H.

Un tel groupe $\hat{G}$ - pas nécessairement unique - est un *groupe de choix* de H (comme on l'appelle respectivement à la théorie de M-hypergroupes polysymétriques).

Proposition 3 *Tout sous-hypergroupe d' un 1-hypergroupe commutatif est lui même un 1-hypergroupe avec le même cœur (zéro) et leur ensemble est un treillis complet.*

3 Les 1-hypergroupes non commutatifs et les quasi M-hypergroupes polysymétriques

Considérons maintenant, plus généralement, le cas non commutatif des 1- hypergroupes. Soit, donc, $(H, \cdot)$ un tel et soit $\omega_H = \{e\}$ son cœur, qui, évidemment, considéré comme sous-hypergroupe de H, est inversible et partage H en classes. L'ensemble $G = H/\omega_H$ de ces classes est un groupe [2] [7] [8] [11], qui sera appelé de même, comme au cas commutatif, *groupe de réduction* de H, ou simplement, son *groupe*. L'élément unité de G est, évidemment, le cœur $\{e\}$ lui-même de H et soit $C(y)$ la classe inverse d'une classe $C(x)$. Comme auparavant de $C(x)C(y) = C(y)C(x) = \{e\}$ on aura $xx' = x'x = e$ pour tout $x' \in C(y)$, qui est un *inverse* ou *symétrique* de x par rapport à e et on note avec $S(x)$ l'ensemble de ces inverses. Les classes de la partition *mod* ω_H, comme il est connu [3] [4] [11], sont $C(x) = ex$ et on a $ex = xe = exe$ [7] (comme, d'ailleurs, il résulte directement : $ex \cdot ex' = \{e\} \Rightarrow ex \cdot ex' \cdot x = ex \Rightarrow exe = ex$ et, de même, $exe = xe$) et on a $x \in ex$, ω_H étant inversible. Par conséquent, e est une *unité* (non scalaire, sauf que H soit un groupe) de H, qui vérifie ainsi de propriétés analogues aux axiomes 2, 3, 4 de la définition 1. Quant au produit de deux classes $C(x) = ex$ et $C(y) = ey$ on a $ex \cdot ey = eexy = exy$, qui évidemment est une classe *mod* ω_H de H, et, même $exy = \cup_{z \in xy} ez = xy$, c'est-à-dire le produit lui-même des elements , x, $y \in H$, démontré comme precedemment au cas commutatif. Enfin, on a que H vérifie encore une propriété respective à l'axiome 5 de la définition 1. En effet, pour tout $x, y, z \in H$, $x' \in S(x)$, $y' \in S(y)$, $z' \in S(z)$ on a , respectivement au cas communtatif, si $z \in xy$, alors $z \in xy \Rightarrow z'z \subseteq z'xy \Rightarrow e \in z'xy \Rightarrow ey'x' \subseteq z'xyy'x' \Rightarrow y'x' \subseteq z'e' \Rightarrow y'x' = z'e \Rightarrow z' \in y'x'$.

Comme conclusion finale on a qu'un 1-hypergroupe non commutatif satisfait aux axiomes de la structure hypercompositionnelle suivante, que nous l' appelerons, par analogie aux autres cas (voir p.e. hypergroupe quasi canonique [1] [10]), *quasi M-hypergroupe polisymétrique.*

Définition 2 On appelle *quasi M-hypergroupe polysymétrique* une hyperstructure $(H, \cdot)$ satisfaisant aux axiomes :

– 1. $(xy)z = x(yz)$ pour tout $x, y, z \in H$.

– 2. $(\exists e \in H)$ $(\forall x \in H)$ $[x \in ex \cap xe]$.

– 3. $(\forall x \in E)$ $(\exists x' \in H)$ $[xx' = x'x = e]$.

Tout tel x' est un *inverse* ou *symétrique* de x par rapport à e considéré et on note leur ensemble, comme auparavant, par $S(x)$.

– 4. Pour tout $x, y, z \in H$, $x' \in S(x)$, $y' \in S(y)$, $z' \in S(z)$ on a, si $z \in xy$, alors $z' \in y'x'$.

De la définition on a comme conséquences les propriétés :

– i. $S(e) = \{e\}$ et, donc, $ee = e$
Car, si $e_1 \in S(e)$, on aura de 3 $ee_1 = e$. Mais de 2, $e_1 \in ee_1$. Donc $e_1 = e$

– ii. *L' unicité* de *e-unité* de H.
Car, évidemment, si pour $x \in H$ on a $e \in ex$, alors $e \in ex \Rightarrow ex' \subseteq exx' = e \Rightarrow ex' = e \Rightarrow ex'x = e = ex$, donc $x \in S(e)$ et $x = e$. Ainsi s'il existe une autre unité e_1, alors $e \in e_1 \Rightarrow e_1 = e$.

– iii. $xH = Hx = H$, pour tout $x \in H$, ce qui justifie la caractérisation de l' hyperstructure $(H, \cdot)$ comme hypergroupe.
En effet, $xH \subseteq H$. D'autre part, comme pour tout $x \in H$ il existe $y \in H$ tel que $z \in xy$ (il se trouve, évidemment, dans $x'z$), donc $H \subseteq xH$. On trouve de même $Hx = H$.

– iv. Tout M-hypergroupe polysymétrique, ainsi que tout groupe, est un quasi M-hypergroupe polysymétrique.

– v. Pour tout $x \in H$ on a $ex = xe = exe$.
En effet, $xx' = e \Rightarrow x(xx')x = xex \Rightarrow (xx)(x'x) = xex \Rightarrow xxe = xex \Rightarrow x'(xxe) = x'(xex) \Rightarrow exe = eex \Rightarrow exe = ex$ et, de même, en partant de $x'x = e$, $exe = xe$.

On démontre, maintenant, le théorème fondamental suivant, qui correspond au théorème 1 de l'introduction :

Théorème 3 *Les ensembles $C(x) = ex(= xe = exe)$, quand x décrit H, forment une partition de H et on a*

$$(ex)(ey) = exy = xy$$

et que, pour tout $x, y \in H$, l'hyperproduit xy est une classe de cette partition. De plus, l'ensemble $G(H) = \{C(x) : x \in H\}$ de ces classes est un groupe par rapport à l'opération $C(x)C(y)$, qui sera appelé encore groupe de réduction *de H,ou simplement,son* groupe.

Démonstration. Nous démontrons tout d' abord le lemme :

Lemme 1 *Quelque soient x, y, z, ω dans H on a*

$$(xy) \cap (z\omega) \neq \emptyset \Rightarrow xy = z\omega$$

et,. par conséquent, $xy \neq z\omega \Rightarrow (xy) \cap (z\omega) = \emptyset$.

Démonstration. Soient $u \in (xy) \cap (z\omega)$ et $u' \in S(u)$, $x' \in S(x)$, $y' \in S(y)$, $z' \in S(z)$, $x \in S(x)$, $\omega' \in S(\omega)$. D' après l' axiome 4 on a $u' \in y'x'$ et pour tout $t \in xy$, $tu' \subseteq (xy)(y'x') = \{e\}$. Donc $tu' = e$ et $t \in S(u')$. Ensuite et comme $u' \in \omega'z'$, $z \in S(z')$, $\omega \in S(\omega')$ on a, de même par l' axiome 4, $t \in z\omega$. Par conséquent, $xy \subseteq z\omega$ et, en changeant les rôles de x, y , on trouve $z\omega \subseteq xy$. Donc $xy = z\omega$.□

Démonstration de la proposition. Tout d' abord $(ex) \cap (ey) \neq \emptyset$ entraine, selon le lemme, $ex = ey$ et, si $ex \neq ey$, alors $(ex) \cap (ey) = \emptyset$. Les ensembles, donc, $C(x) = e \cdot x$ forment , en effet, une partition de H. D' autre part $z \in xy \Rightarrow (xy) \cap (ez) \neq \emptyset$, donc $xy = ez$ et xy est vraiment une classe de la partition. Enfin on a $C(x)C(y) = (ex)(ey) = exy = xy = C(z)$ pour $z \in xy$ quelconque, c'est-à-dire que le produit $C(x)C(y)$ des classes est une opération qui, comme on le vérifie facilement, est assosiative et par rapport à elle la classe $C(e) = ee = \{e\}$ est un élément unité. De plus, pour toute classe $C(x)$ et pour un n'importe quel $x' \in S(x)$ on a $C(x)C(x') = ex \cdot ex' = \{e\} = C(e)$ et de même $C(x')C(x) = C(e)$ et la classe $C(x')$ est l'inverse de $C(x)$ dans $G(H)$, qui est en effet un groupe. Mais il faut remarquer que, comme l' inverse dans un groupe est unique, pour tout $x', x'' \in S(x)$, $x' \neq x''$, on a $C(x') = C(x'')$, donc $S(x) \subseteq \cup_{x' \in S(x)} C(x') = C(x')$ pour un quelconque $x' \in S(x)$. Inversement, comme $C(x)C(x') = \{e\}$, on a $C(x') \subseteq S(x)$. Il en résulte $S(x) = C(x')$.

Corollaire 1 *$S(x)$ est une classe de la partition et même l'inverse de la classe $C(x)$ dans le groupe $G(H)$.*

Corollaire 2 *Le groupe du singleton $\{e\}$ considéré comme sous-hypergroupe de H est inversible et on a $\{e\} = \omega_H$, c'est -à-dire $\{e\}$ est le cœur de H.*

Corollaire 3 *H est un 1-hypergroupe et évidemment, $H/\omega_H = G(H)$.*

En récapitulant on a comme conclusion finale le théorème suivant, qui correspond au théorème (2) du cas commutatif.

Théorème 4 *Tout 1-hypergroupe non commutatif est un quasi M-hypergroupe polysymétrique et réciproquement.*

Remarque 1 Évidemment, sans que l' on fasse de distinctions (commutatif, non commutatif) les théorèmes (2) et (4) peut être formulés de manière unique comme : *Tout 1-hypergroupe est un quasi M-hypergroupe polysymètrique et inversement.*

L'étude au fond des quasi M-hypergroupes polysymétriques en liaison avec les M-hypergroupes polysymétriques fournit un grand nombre de propriétés remarquables, desquelles on mentionnera à la communication présente seulement celle qui se rapporte à la construction de tous les quasi M-hypergroupes polysymétriques, dont le groupe de réduction est isomorphe à un groupe donné. Relativement on a le théorème suivant, qui est démontré par la vérification des axiomes, comme respectivement au cas commutatif [12] [15] [17] :

Théorème 5 *Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Si on correspond à G de manière biunivoque une famille $\hat{G}$ d' ensembles disjoints entre eux, dont le respectif à l'unité de G est un singleton et, ensuite, on rend $\hat{G}$ moyennant une opération convenable $X \circ Y$ groupe isomorphe à G, alors l'ensemble $H = \cup_{X \in \hat{G}} X$ avec comme hyperopération $xy = X \circ Y$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$, $(X, Y) \in \hat{G}^2$ est un qaasi M-hypergroupe polysymétrique (donc 1-hypergroupe), dont le groupe de reduction est $(\hat{G}, \circ)$.*

On finit le sujet en donnant deux exemples dont le groupe du départ G est commutatif au premier d'eux et non commutatif au second.

Examples

1_{er}. Soit $G = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ le groupe abelien des classes residuelles *mod* 4 des entiers relatifs. Les M-hypergroupes polysymétriques (1-hypergroupes commutatifs) dont le groupe de réduction est isomorphes à G dépendent finalement de tout ensemble H, fini ou non, avec $card\ H \geq 4$ et de ses partitions en quatre classes et à des isomorphismes évidents près. Ainsi, si p.e. $H = \{a, b, c, d, e, f\}$, la famille $\hat{G}$ qui résulte d' une partition de H en quatre classes peut posseder un ou deux ensembles au plus, qui ne sont pas des singletons, et, par conséquent, on aura respectivement de M- hypergroupes polysymétriques convenablement définis moyennant $\hat{G}$. Soit, donc, $\hat{G} = \{X_0, X_1, X_2, X_3\}$ avec p.e. $X_0 = O = \{a\} = \{0\}$ (considéré comme élément neutre de $\hat{G}$) $X_1 = \{b\}$, $X_2 = \{c, d\}$, $X_3 = \{e, f\}$. On exprime les groupes $(G, +)$ et $(\hat{G}, \oplus)$ et le M-hypergroupe polysymétrique $(H, +)$, que l' on a en appliquant le théorème ci-dessus, par les tableaux :

G :

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\bar{G}$:

$\oplus$	0	X_1	X_2	X_3
0	0	X_1	X_2	X_3
X_1	X_1	X_2	X_3	0
X_2	X_2	X_3	0	X_1
X_3	X_3	0	X_1	X_2

$+$	0	b	c	d	e	f
0	0	b	$\{c, d\}$	$\{c, d\}$	$\{e, f\}$	$\{e, f\}$
b	b	$\{c, d\}$	$\{e, f\}$	$\{e, f\}$	0	0
c	$\{c, d\}$	$\{e, f\}$	0	0	b	b
d	$\{c, d\}$	$\{e, f\}$	0	0	b	b
e	$\{e, f\}$	0	b	b	$\{c, d\}$	$\{c, d\}$
f	$\{e, f\}$	0	b	b	$\{c, d\}$	$\{c, d\}$

2_{de}. Soit $G = S_3 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ le groupe symétrique des substitutions des éléments 1, 2, 3, c' est-à-dire des permutations (123), (132), (213), (231), (312), (321) respectivement, qui se donne par le tableau ci-dessous (1). Pour la construction de quasi M-hypergroupes polysymétriques (1- hypergroupes non commutatifs), en partant du groupe non commutatif S_3 et d' un ensemble, p.e. $H = \{l, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, dont le groupe de réduction est isomorphe à S_3, on considère comme famille $\hat{G} = \{X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$ les six classes d' une partition de H, qui comme groupe isomorphe avec S_3, se donne par le tableau (2). Comme il existe de partitions de H en six classes possedant une, ou deux, ou encore, trois classes au plus, qui, comme ensembles, ne sont pas de singletons, on aura des quasi M-hypergroupes polysymétriques convenablement correspondants à ces partitions, définis moyennant $\hat{G}$. Soit p.e. $X_1 = \{1\}$ - l' élément unité de $\hat{G}$ - $X_2 = \{2\}$, $X_3 = \{3\}$, $X_4 = \{4\}$, $X_5 = \{5, 6\}$, $X_6 = \{7, 8, 9\}$ le quasi M-hypergroupe polysymétrique $(H, \odot)$ pris d' après le théorème (5) est eclairsi par le tableau (3).

(1)

$\cdot$	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_2	S_2	S_1	S_5	S_6	S_3	S_4
S_3	S_3	S_4	S_1	S_2	S_6	S_5
S_4	S_4	S_3	S_6	S_5	S_1	S_2
S_5	S_5	S_6	S_2	S_1	S_4	S_3
S_6	S_6	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1

(2)

$\odot$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_2	X_2	X_1	X_5	X_6	X_3	X_4
X_3	X_3	X_4	X_1	X_2	X_6	X_5
X_4	X_4	X_3	X_6	X_5	X_1	X_2
X_5	X_5	X_6	X_2	X_1	X_4	X_3
X_6	X_6	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1

(3) :

$\odot$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	{5,6}	{5,6}	{7,8,9}	{7,8,9}	{7,8,9}
2	2	1	{5,6}	{7,8,9}	3	3	4	4	4
3	3	4	1	2	{7,8,9}	{7,8,9}	{5,6}	{5,6}	{5,6}
4	4	3	{7,8,9}	{5,6}	1	1	2	2	2
5	{5,6}	{7,8,9}	2	1	4	4	3	3	3
6	{5,6}	{7,8,9}	2	1	4	4	3	3	3
7	{7,8,9}	{5,6}	4	3	2	2	1	1	1
8	{7,8,9}	{5,6}	4	3	2	2	1	1	1
9	{7,8,9}	{5,6}	4	3	2	2	1	1	1

Références

[1] BONANSINGA, P. *Su gli ipergruppi quasicanonici,* Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. vo1.27, Messina, 1981.

[2] CORSINI, P. *Ipergruppi semiregolari e regolari*, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino. V.40, 3,1982.

[3] CORSINI, P. *Feebly canonical and 1-Hypergroups,* Acta Universitatis Carolinae, Math et Phys., V.24, No.2,1983.

[4] GORSINI, P. *Prolegomena of Hypergroup Theory,* Publisher : Aviani Editore, p.215, Udine, Italy.

[5] CORSINI, P., FRENI, D. *On the heart of hypergroups.* Mathematica Montisnigri, N.2, 1992.

[6] KOSKAS, M. *Groupoides. demi-hypergroupes et hypergroupes,* J. Math. Pures et Appl., vol. 49, 1970.

[7] KRASNER, M. *Introductton à la théorie de valuations et à la théorie de Galois,* Cours à la Faculte de Sciences de l'Université de Paris,1968.

[8] KRASNER, M. *Une nouvelle présentation de la théorie des groupes de permutations et ses applications à la théorie de Calois et de produit d'entrelacement ("wreath product") de groupes,* Math. Balc 3, Beograd, 1973.

[9] MARTY, F. *Sur une généralisation de la notion de groupe,* Actes d'8me congrès des mathematiciens Scandinaves, Stockholm, l934.

[10] MASSOUROS, CHR. *Quasicanonical hypergroupes,* Proc. of the 4th Intern. Con. on Algebra :ic Hyperstructures and Applications, Xanthi, Greece,1990.

[11] MIGLIORATO, R. *Sugli 1-Ipergruppi*, Riv. di Mat. Pura ed Appl., n.5, Udine, Italia,1989.

[12] MITTAS, J. *Hypergroupes et hyperanneaux polysymétriques,* C. R. Acad. Sc. t. 271, Sér. A. Paris I970.

[13] MITTAS, J., YATRAS, C. *M-Polysymmetrical hyperrings,* In printing on Proc. of Int. Sym. on Hyperstructures and their applications, Pescare Italy, 29 Set.- 1 Ott. 1995.

[14] VOUGIOUKLIS, T. *Hyperstructures and their representations,* Hadronic Press, p.180,l994.

[15] YATRAS, C. *M-polysymmetrical hypergroups,* Riv. di Mat. Pura ed Appl., n.11, Udine, Italy 1992.

[16] YATRAS, C. *Suphypergroups of M-polysymmetrical hypergroups,* Proc. of the 5th Intern. Con. on Algebraic Hyperstructures and applications, Iassy, Romania 1993.

[17] YATRAS, C. *M-Polysymmetrical hypergroups, M-Polysymmetrical hyperrings and their Applications* (in Greek), Doctorat thesis, Democritus University of Thrace. Xanthi, Greece 1995.

Author's address :

Jean Mittas
Edmond Abbott 5,
546 43 Thessaloniki
GREECE