SUR LES CONNEXIONS DE FINSLER PROJECTIVE

Gheorghe Murărescu

Abstract

In the present note we continue the study of the Finsler-projective connections started in [3], [6]. After definitions, we analyse some problems of holonomy, metrics, etc.

Résumé

Dans la présente note nous continuous l'étude des connexions Finsler-projective comancé dans [3], [6]. D'après les définitions, nous abordons les questions d'holonomie, métriques, etc.

AMS subject classification: 53C60
Key words: projective Finsler connection, holonomy

Soit $\xi = (E, \pi, M)$ le fibré vectorial à fibre type $F = R$ $(\dim M = n)$, equipé à une connexion nonlinéaire N, et une $d-$connexion linéaire D sur E, [1]. Si nous notons par $\{X_\alpha\} = \left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ la base naturelle, les coefficients locals de D sont respectivement :

$$\left\{\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\right\} \ et \ \left\{\gamma^\gamma_{\alpha\beta}\right\},$$

ou $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n, 0$, mais $i, j, k = 1, \ldots, n$, $\left(x^0 = y\right)$.

Définition 1. [6] . La connexion D s'appelle *quasi-projective normale* si les coefficents Γ satisfant les relations:

$$\Gamma^0_{0\alpha} = w\Gamma^i_{i\alpha} \ , \ w = -\frac{1}{n+1}.$$

Editor Gr.Tsagas *Proceedings of the Workshop on Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebras, 1995,* 57-60

La connexion quasi-projective normale symètrique a les coeficients locals essentiels:

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}, \quad \Gamma^0_{0k} = w\Gamma^i_{ik},$$

les restes étant nuls.

Pour une connexion quasi-projective normale symètrique, les coefficients locals de la courbure R ont les expresions:

$$R^i_{jkh} = \frac{\delta\Gamma^i_{jk}}{\delta x^h} - \frac{\delta\Gamma^i_{jh}}{\delta x^k} + \Gamma^r_{jk}\cdot\Gamma^i_{rh} - \Gamma^r_{jh}\cdot\Gamma^i_{rk}, \quad R^i_{jk0} = \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial y},$$
$$R^0_{ik0} = \frac{1}{n+1}\frac{\partial\Gamma^i_{ik}}{\partial y} = \frac{\partial^2 N_k}{\partial y^2}, \quad R^\sigma_{\alpha\beta\gamma} = 0\; pourlesrestes.$$

Les coefficients de type Weyl sont définis par:

$$J^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + (\delta^i_j \partial N_k/\partial y + \delta^i_k \partial N_j/\partial y),$$

$$J^i_{jkh} = \delta J^i_{jh}/\delta x^k - \delta J^i_{jk}/\delta x^k + J^r_{jh}\cdot J^i_{rk} - J^r_{jk}\cdot J^i_{rh}.$$

Pour le champ tensoriel de Ricci $R_{\alpha\beta} = R^\gamma_{\alpha\beta\gamma}$, dans la base adaptée nous avons $R_{jk} = R_{kj}$ et $R_{\alpha\beta} = 0$ pour les restes. Nous notons aussi $J_{jk} = J^i_{jki}$. Entre deux connexions D et $\overline{D}$ quasi-projectives normales symètriques nous considerons la transformation $\tau : D \to \overline{D}$ définie par

$$\overline{D}_X Y = D_X Y + \sigma(X)\, hY + \sigma(Y)\, hX,$$

òu h est le projecteur horizontal et σ est un $d-$champs de type $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

À ce notations, dans la base adaptée, une transformation τ s'écrit localement:

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \sigma_j\delta^i_k + \sigma_k\delta^i_j, \quad \overline{\Gamma}^i_{0k} = \Gamma^i_{0k}, \quad \overline{\Gamma}^i_{k0} =$$
$$\Gamma^i_{k0}, \quad \overline{\Gamma}^i_{00} = \Gamma^i_{00}, \quad \overline{\Gamma}^0_{jk} = \Gamma^0_{jk}, \overline{\Gamma}^0_{0k} = \Gamma^0_{0k}, \quad \overline{\Gamma}^0_{00} = \Gamma^0_{00}.$$

Dans ces conditions nous donnons:

Définition 2. S'appele la *connexion Finsler projective normale*, une classe des connexions quasi-projective normale

$\{\ldots D, \widetilde{0}, \ldots\} = 0^*$ liées par les transformations τ ; les coefficients $\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$ de $\overset{*}{D}$ sont définis par :

$$\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}, \quad \overset{*}{\Gamma}{}^i_{0k} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{k0} = y^{-1}\delta^i_k, \quad \overset{*}{\Gamma}{}^i_{00} = 0,$$
$$\overset{*}{\Gamma}{}^0_{jk} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk} \cdot N_i + y/(n-1)\cdot J_{jk} - \delta N_j/\delta x^k,$$
$$\overset{*}{\Gamma}{}^0_{0k} = \overset{*}{\Gamma}{}^0_{k0} = 0, \quad \overset{*}{\Gamma}{}^0_{00} = 0;$$

les coefficients $\overset{*}{\gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$ de $\overset{*}{D}$ sont définis par:

$$\overset{*}{\gamma}{}^i_{jk} = J^i_{jk}, \quad \overset{*}{\gamma}{}^i_{00} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{00} \quad , \quad \overset{*}{\gamma}{}^i_{0k} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{0k} = \overset{*}{\gamma}{}^i_{k0},$$

$$\overset{*}{\gamma}{}^0_{k0} = \overset{*}{\gamma}{}^0_{0k} = 0, \overset{*}{\gamma}{}^0_{jk} = y/(n-1)J_{jk}, \quad \overset{*}{\gamma}{}^0_{00} = 0.$$

La connexion $\overset{*}{D}$ est linéaire symètrique mais n'est pas une d-connexion [6]. Des calculs sur la courbure $\overset{*}{R}$ de la connexion $\overset{*}{D}$ (que s'expreme seulement par les coefficients projectifs J) conduisent (comme dans le cas clasique) au:

Corollaire 1. Le tenseur de Ricci de la connexion $\overset{*}{D}$ est nul; donc $\overset{*}{R}_{\alpha\beta} = 0$.

En partant de la théorie générale du transport parallèle et des groupes d'holonomie pour les connexions linéaires générales, nous définisons ces notions pour la connexion $\overset{*}{D}$. Par exemple nous avons reçu:

Corollaire 2. L'algèbre de Lie du groupe réduit d'holonomie est générée par les éléments de la forme $\left\{ \left(\overset{*}{R}{}^i_{jkh} \right), \left(\overset{*}{R}{}^i_{jk0} \right), \left(\overset{*}{R}{}^0_{jkh} \right) \right\}_{(z_0)}$, $z_0 \in E$.

Nous avons démontré une théorème analogue à un résultat de K.Yano et Sasaki pour les connexions projectives normales clasiques:

Théorème 1. Si le groupe d'holonomie d'une connexion Finsler-projective normale $\overset{*}{D}$ sur E laisse invariante une hyperquadrique nondégènérée dans l'espace tangent T_zE, alors il existe une connexion quasi-projective normale D' dans la classe que définit la connexion projective $\overset{*}{D}$ de sorte que $D'_xJ' = 0$, où J' est le coeficientprojectiv de composantes (J_{kj}).

Démonstration. Si sur T_zE nous considerons la hyperquadrique donnée par

$$t_{ij}x^ix^j + 2t_{i0}x^iy + t_{00}y^2 = 0, \quad t_{\alpha\beta} = t_{\beta\alpha} \; et \; \det(t_{\alpha\beta}) \neq 0,$$

l'invariance à l'action du groupe d'holonomie s'exprime par

$${}^thTh = \sigma T \Longleftrightarrow \overset{*}{D}_X \, T = \sigma(X)\, T,$$

où T est le tenseur de coordonnées $(t_{\alpha\beta})$. Des calculs conduisent au:

$$t_{kj} = -y^2/(n-1) \cdot J_{kj},$$

d'où dans la base naturelle,

$$\frac{\partial J_{ij}}{\partial x^k} - J^s_{ki} \cdot J_{sj} - J^s_{kj} \cdot J_{is} = 0 \; donc \; D'_XJ' = 0.$$

Pour sa définition, J' est un tensor symètrique.

■

Par sa définition le tenseur symètrique J' est nondégénéré. De ce fait et d'après le théorème 1., nous avons:

Théorème 2. La connexion quasi-projective normale D' que satisfait le théorème 1. est une connexion métrique-projective à métrique J'.

Comme se peut remarquer J' est une métrique indéfinie sur E. Le caractère projectif de J' a étè mentionne ci-dessus.

Bibliographie

1 Miron R., Anastasiei M., Fibrate vectoriale, spatii Lagrange, aplicatii în teoria relativitatii, Ed. Acad. R.S.România, Bucuresti, 1987.

2 Murarescu G., Sur la théorie globale des connexions projectives, C.R. Acad. Sci. Paris, T.269, 1969, p.141-143.

3 Murarescu G., Sur les connexions de Finsler-projective. Le groupe d'holonomie, An.St.Univ.Timisoara, Fasc.1(1995), T.33 (sous presse).

4 Okada T., Pair connection on line bundle and projective connection, Symp. on Finsler Geometry at Kinosaki, Nov.1984.

5 Okubo T., Differential Geometry, Pure and Appl.Math. A Series of Monogr. and Textbooks, 1987.

6 Stavre P., Murarescu G., Sur les connexions de Finsler projectives normales, Bull.Math.Soc.Sci.Math.Roum., T.37(1985), no.1-2, 1993, p.133-147.

7 Wakakuwa H., Holonomy groupes, Publ.St.Groupes of Geometry, vol.6, 1971.

Author's address:

Gheorghe Murărescu
Department of Mathematics,
University of Craiova, 13, Al.I.Cuza st. Craiova 1100, Romania