Résolution des équations d'Euler isentropes dans le cas linéaire non positif au sens de Friedrichs

Samira Khatmi

Résumé

Dans cet article, on s'intéresse à la résolution des équations d'Euler isentropes (dans le cas linéaire) considérées comme un système symétrique non positif au sens de Friedrichs. On y démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible. Les résultats présentés ici, généralisent ceux de Friedrichs mais ne sont pas abstraits puisqu'ils dépendent du problème considéré.

Mots Clés : Système de Friedrichs, Euler isentrope, Éléments finis.
2000 MSC 35A01, 35F15, 65M60

1 Introduction

Ce travail est consacré aux équations d'Euler isentropes. Le système n'est pas positif au sens de Friedrichs. Pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible, il faut donc montrer " à la main " que le noyau de l'adjoint A^* de l'opérateur A est réduit à $\{0\}$ et que l'inverse de A^* est continu sur son image. Dans le cas des opérateurs positifs au sens de Freidrichs cela était une conséquence de la positivité de l'opérateur. Une fois l'injectivité de A^* acquise, la technique consiste ensuite à résoudre le problème par une méthode de dualuté. Les résultats présentés généralisent les résultats de Friedrichs mais ne sont pas abstraits puisqu'ils dépendent du problème considéré.L'idée de base développée dans ce travail est l'existence d'une solution faible, par dualité, sans prémultiplier le système, ni faire de changement de fonctions.

2 Préliminaires

Dans cette section, on va rappeler la théorie des systèmes hyperboliques de premier ordre exposée dans [2](cet article étant très difficile à lire, nous renvoyons le lecteur aux travaux de P.Lascaux dans [1]et [3], ainsi que la discétisation de ce genre de problème par des éléments finis continus et discontinus, et enfin on donnera quelques résultats de majorations d'erreur [4].

Applied Sciences, Vol.23, 2021, pp. 56-80.

2.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ assez régulière. Soit $f \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^p$ et on cherche $u \in (\mathbf{L}^2(\Omega))^p$ telle que :

$$Au = \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + A_0(x)u = f \text{ dans } \Omega \tag{1}$$

$$(B - M)u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{2}$$

Les matrices $A_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ sont définis dans $\overline{\Omega}$, symétriques et à coefficients lipschitziens en x,$1 \leq i \leq n$. La matrice $A_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ n'est pas nécessairement symétrique et est à coefficients bornés. Avec $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$, l'espace des matrices carrées d'ordre p.

$$B = \sum_{i=1}^{n} \nu_i(x)A_i(x) \text{ pour } x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

$\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ étant le vecteur unitaire dirigé suivant la normale extérieure à $\partial\Omega$ M est une matrice de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ qui vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{c} M(x) \text{ est continue en } x \in \partial\Omega \\ \\ M + M^* \text{ semi-définie positive} \\ \\ Ker(B - M) + Ker(B + M) = \mathbb{R}^p. \end{array} \right. \tag{4}$$

Donnons maintenant quelques définitions qui nous serviront ultérieurement.

Définition 2.1. *L'opérateur A est dit **positif au sens de Friedrichs** s'il existe une constante c_0 strictement positive telle que :*

$$C = A_0 + A_0^* - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \geq c_0 Id \quad \forall x \in \Omega. \tag{5}$$

Définition 2.2. *On appelle **adjoint formel** de A, l'opérateur A^* défini par :*

$$A^*(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(A_i(x)u(x)) + A_0^*(x)u(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Définition 2.3. *Nous dirons que v satisfait la condition **aux limites adjointes** si*

$$(B + M^*)v = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega. \tag{6}$$

Notons $(.,.)$ le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^p$.
On définit le produit scalaire sur $(\mathbf{L}^2(\Omega))^p$ (noté $\mathbb{L}^2(\Omega)$) par :

$$(f, g)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_\Omega (f(x), g(x))dx; \;\; |f|_{\mathbb{L}^2(\Omega)^2} = (f, f)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

De même on note les espaces de Sobolev :

$$(\mathbf{H}^k(\Omega))^p = \mathbb{H}^k(\Omega) \quad k \in \mathbb{N}^*$$

Définition 2.4. *Une matrice M de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ à coefficients continus sur $\partial\Omega$ est dite **semi-admissible** si $(M+M^*)$ est semi-définie positive sur $\partial\Omega$.*
*Les conditions aux limites homogènes définies par $(B-M)u=0$ sur $\partial\Omega$ sont dites alors **semi-admissibles.***

Lemme 2.1. *Si la matrice B est semi-définie positive (resp. semi-définie négative), la seule matrice M satisfaisant l'hypothèses (4) est donnée par :*

$$M = B \text{ (resp. } M = -B).$$

2.2 Quelques résultats théoriques

Lemme 2.2. *Soient A et B définies par (1) et (3), il existe alors une matrice C telle que pour tout $u \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, on a :*

$$2(Au,u)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = (Cu,u)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega}(Bu,u)ds.$$

Lemme 2.3. *Pour tout $u,v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, on a :*

$$(Au,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = (u,A^*v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega}(Bu,v)ds.$$

Lemme 2.4. *Pour tout u, (resp.v) appartenant à $\mathbb{H}^1(\Omega)$ et satisfaisant la condition aux limites (2), (resp.(6)) on a :*

$$(Au,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = (u,A^*v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Remarque 2.1. *Le problème adjoint (P^*) associé au problème (1)-(2) s'écrit de la façon suivante : On se donne $f^* \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ et on cherche $u^* \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$ tel que*

$$(P^*)\begin{cases} A^*u = f^* \text{ dans } \Omega \\ \\ (B+M^*)u^* = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 2.5. *On suppose que l'opérateur A est positif au sens de Friedrichs et que la matrice M est semi-admissible, alors il y a une unicité dans $\mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$ pour les solutions des problèmes (1)- (2) et (P^*), et on a pour toute solution $\mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$:*

$$|u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{c_0}|f|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \text{ et } |u^*|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{c_0}|f^*|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Définition 2.5. *On dit que $u \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ est une **solution faible** du problème (1)-(2) si pour tout $v \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ satisfaisant les conditions aux limites adjointes (6) on a :*

$$(u,A^*v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = (f,v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Théorème 2.1. *Si l'opérateur A est positif au sens de Friedrichs et si l'hypothèse (4) est satisfaite, alors pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, il existe une solution faible $u \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ vérifiant :*

$$|u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq \frac{1}{c_0}|f|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Définition 2.6. *On dit que u est une **solution forte** du problème (1)-(2), s'il existe une suite (u_j) de fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, satisfaisant les conditions aux limites (2) et telle que*

$$\lim_{j\to+\infty}(|u_j - u|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + |f - Au_j|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}) = 0.$$

Théorème 2.2. *On suppose que l'opérateur A est positif au sens de Friedrichs et que la condition (4) est vérifiée. Si $\partial\Omega$ est de classe C^2 et $Ker(B - M) \subset C^0(\Omega)$, alors pour tout $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, le problème (1)-(2) admet une unique solution forte.*

Remarque 2.2. *Toute solution forte est solution faible*

Remarque 2.3. *Il existe d'autres théorèmes pour l'existence d'une solution forte, selon les hypothèses faites sur la frontière $\partial\Omega$, le second membre f et les matrices $B(x)$ et $M(x)$, $x \in \partial\Omega$. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à K. O. Friedrichs ([2], pp 377-384) ; P. D. Lax et RS. Phillips ([5], pp 440-444) ; et P. S. Phillips et L. Sarason [6].*

3 Équations d'Euler isentropes

3.1 Notation

Avant de présenter ces équations, introduisons les grandeurs physiques que nous utiliserons tout au long de ce travail.

ρ	densité de masse
$\mathbf{u}$	vitesse, $\mathbf{u} = (u, v)^t$
p	pression
T	température
e	énergie binterne par unité de masse
E	énergie totale$E = \rho e = \frac{1}{2}\rho\|\mathbf{u}\|^2$
μ	viscosité
k	conductivité thermique
c_p, c_v	chaleurs spécifiques
γ	coefficient adiabatique,$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
R	constante du gaz particulier,$R = c_p - c_v$
τ	tenseur déviateur du tenseur des contraintes
$\mathbf{d}$	tenseur des taux de déformation

3.2 Équations de Navier-Stokes

Les équations de conservation suivantes régissent l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux conducteur de chaleur et compressible, en l'absence de force extérieures [7]. Conservation de la masse

$$div(\rho\mathbf{u}) = 0 \tag{7}$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - div(\tau) = 0 \tag{8}$$

Conservation de l'énergie

$$div\,((E+p)\mathbf{u}) - div(k\nabla T) = div(\tau\mathbf{u}). \tag{9}$$

On suppose que le fluide est un gaz parfait régi par les équations d'état

$$e = c_v T \tag{10}$$

$$p = \rho R T. \tag{11}$$

Le fluide est supposé newtonien. En faisant l'hypothèse de Stokes, on a

$$\tau = 2\mu\left(\mathbf{d} - \frac{1}{3}\,\mathbf{I}\;div\;\mathbf{u}\right) \tag{12}$$

où $\mathbf{I}$ désigne le tenseur d'identité, et $\mathbf{d}$ est le tenseur

$$\mathbf{d}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + (\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{13}$$

La subtitution de l'expression de τ dans (8) fournit les équations de Navier-Stokes. En supposant que c_p, μ et K sont des constantes et en remplaçant dans (9) l'énergie E par T grâce à la relation (10), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0. \tag{14}$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) = 0 \tag{15}$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x} + \rho v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0 \tag{16}$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) - K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = \Phi \tag{17}$$

où Φ est la fonction de dissipation.

$$\Phi = \tau : \mathbf{d} = \left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right). \tag{18}$$

Les équations (14)-(17) sont appelées les **Équtions de Navier-Stokes complètes.**

3.3 Équations d'Euler isentropes

Nous supposons que le fluide considéré est idéal (i.e. sans viscosité ($\mu = 0$) ni conductivité thermique ($k = 0$), isentrope, c'est à dire régi par l'équation d'état

$$p = A\rho^\gamma, A \text{ est une constante strictement positive.} \tag{19}$$

La vitesse du son est alors donnée par

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{A\gamma\rho^{\gamma-1}}. \tag{20}$$

Comme $\mu = 0$, les équations (15)-(16) s'écrivent :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

L'équation (14) s'écrit :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0. \tag{21}$$

Or (19) et (20) entraînent :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = A\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = A\gamma\rho^{\gamma-1} \frac{\partial \rho}{\partial y} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}.$$

L'équation (21) devient alors

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{a^2} \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

On obtient ainsi le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} \rho u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \rho v \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\[2ex] \rho u \dfrac{\partial v}{\partial x} + \rho v \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\[2ex] \rho \dfrac{\partial u}{\partial x} + \rho \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{u}{a^2} \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{v}{a^2} \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{array} \right.$$

que l'on peut écrire sous la forme matricielle suivante :

$$A_x(w) \frac{\partial w}{\partial x} + A_y(w) \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{22}$$

où $w = (u, v, p)^t$ et

$$A_x = \begin{pmatrix} \rho u & 0 & 1 \\ 0 & \rho u & 0 \\ \rho & 0 & \dfrac{u}{a^2} \end{pmatrix} ; A_y = \begin{pmatrix} \rho v & 0 & 1 \\ 0 & \rho v & 0 \\ \rho & 0 & \dfrac{v}{a^2}. \end{pmatrix} \tag{23}$$

3.3.1 Linéarisation

Le système (22) est linéarisé autour d'un état constant w^0 en remplaçant w par $w^0 + \epsilon w + o(\epsilon)$ et en négligeant les termes d'ordre supérieur à ϵ, on obtient le système hyperbolique du premier ordre suuivant :

$$A_x(w^0) \frac{\partial w}{\partial x} + A_y(w^0) \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{24}$$

3.3.2 Résolution de l'Équation d'Euler isentrope linéarisée

On se donne un domaine
$$\Omega = [0,1] \times [0,1]$$
de bord Γ décomposé en :
$$\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$
où
$$\Gamma_- = \{(x,y) \in \overline{\Omega} : x = 0 \text{ et } 0 < y < 1\}\,;\, \Gamma_+ = \{(x,y) \in \overline{\Omega} : x = 1 \text{ et } 0 < y < 1\}$$
$$\Gamma_1 = \{(x,y) \in \overline{\Omega} : y = 0\}\,;\, \Gamma_2 = \{(x,y) \in \overline{\Omega} : y = 1\}$$
On pose
$$\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ et } \Gamma_\pm = \Gamma_- \cup \Gamma_+$$
On se donne le champ vectoriel $\mathbf{c} = (c,d) \in (C^1(\overline{\Omega}))^2$ tel que $w^0 = (c,d,p^0)$ et qui vérifie :
$$\mathbf{c}.n = 0 \text{ sur } \Gamma_0$$
$$\mathbf{c}.n < 0 \text{ sur } \Gamma_- \quad ; \quad \mathbf{c}.n > 0 \text{ sur } \Gamma_+$$
Le problème s'écrit alors :
$$\begin{cases} \rho_0(\mathbf{c}\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = f_* & \text{dans } \Omega \\ \\ \rho_0 div\mathbf{u} + \dfrac{1}{a^2}\mathbf{c}\nabla p = f_3 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{25}$$
où $(f_*, f_3) \in (\mathbb{L}^2(\Omega))^3$ est donné, $f_*^t = (f_1, f_2)$.
Afin de simplifier l'analyse de ce qui va suivre posons $\rho_0 = 1$ et supposons que $a = \sqrt{\dfrac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ est constante. On obtient alors le système :
$$A_x \frac{\partial w}{\partial x} + A_y \frac{\partial w}{\partial y} = F. \tag{26}$$
Où $w = (u,v,p)^t$, $\quad F = (f_*, f_3)^t$, et Avec
$$A_x = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{c}{a^2} \end{pmatrix} \quad , \quad A_y = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{d}{a^2}. \end{pmatrix}$$
Avec les conditions aux limites semi-admissibles au sens de Friedrichs (cf définition 2.4) suivantes :

- Cas supersonique : $c(x,y) > a \ \ \forall (x,y) \in \Omega^2$
$$\begin{cases} u = v = p = 0 & \text{sur } \Gamma_- \\ \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$
- Cas subsonique $c(x,y) < a \ \ \forall (x,y) \in \Omega^2$
$$\begin{cases} cu + p = v = 0 & \text{sur } \Gamma_- \\ \\ p = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \\ \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

- Cas limite $c(x,y) = a \ \ \forall (x,y) \in \Omega^2$

$$\begin{cases} cu + p = v = 0 & \text{sur } \Gamma_- \\ \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0. \end{cases}$$

Remarque 3.1. *Le système peut paraître comme une équation différentielle, mais en fait c'est un problème couplé.*

La matrice C donnée dans la définition 2.1 est :

$$C = \begin{pmatrix} -div\mathbf{c} & 0 & 0 \\ \\ 0 & -div\mathbf{c} & 0 \\ \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2}div\mathbf{c} \end{pmatrix}$$

Le système (26) est positif dès que $div\mathbf{c} < 0$.
Dans [8], L. Renggli utilise le changement $w = \widetilde{w}e^{\alpha x}$, le système devient alors :

$$A_x \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial y} + \alpha A_x \widetilde{w} = e^{-\alpha x} F \tag{27}$$

et la matrice

$$C = \begin{pmatrix} -div\mathbf{c} + 2\alpha c & 0 & 2\alpha \\ \\ 0 & -div\mathbf{c} + 2\alpha c & 0 \\ \\ 2\alpha & 0 & \dfrac{-div\mathbf{c} + 2\alpha c}{a^2} \end{pmatrix}$$

<u>**Cherchons les valeurs propores de** C</u>

$det(C - \lambda I) = 0$ implique que :

$$(2\alpha c - div\mathbf{c} - \lambda)\left[\lambda^2 - (2\alpha c - div\mathbf{c})\left(1 + \frac{1}{a2}\right)\lambda + \frac{(2\alpha c - div\mathbf{c})^2}{a^2} - 4\alpha^2\right] = 0$$

ce qui implique

$$\begin{cases} (2\alpha c - div\mathbf{c} - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 2\alpha c - div\mathbf{c} \\ \\ ou \\ \\ \lambda^2 - (2\alpha c - div\mathbf{c})\left(1 + \frac{1}{a2}\right)\lambda + \frac{(2\alpha c - div\mathbf{c})^2}{a^2} - 4\alpha^2 = 0 \ \ (*) \end{cases}$$

<u>Résolution du trinôme (*)</u>

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\alpha c - div\mathbf{c})^2\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) - 4\left(\frac{(2\alpha c - div\mathbf{c})^2}{a^2} - 4\alpha^2\right) \\ &= (2\alpha c - div\mathbf{c})^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) + 16\alpha^2 > 0 \end{aligned}$$

donc il y a deux racines

$$\lambda_1 = \frac{(2\alpha c - div\mathbf{c})\left(1+\dfrac{1}{a^2}\right)+\sqrt{\Delta}}{2} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{(2\alpha c - div\mathbf{c})\left(1+\dfrac{1}{a^2}\right)-\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice C soit définie positive, est que ses valeurs propres soient strictement positives.

$\lambda_0 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha c - div\mathbf{c} > 0$ par suite $\lambda_1 > 0$

$$\lambda_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\left(\frac{(2\alpha c - div\mathbf{c})^2}{a^2} - 4\alpha^2\right) = (2\alpha(c-a) - div\mathbf{c})(2\alpha(c+a) - div\mathbf{c}) > 0.$$

Donc pour que le système (27) soit positif au sens de Friedrichs, il faut et il suffit que α vérifie les deux inégalités :

$$\begin{cases} 2\alpha c - div\mathbf{c} > 0 \\ (2\alpha(c-a) - div\mathbf{c})(2\alpha(c+a) - div\mathbf{c}) > 0. \end{cases} \tag{28}$$

Pour chercher les α vérifiant (28), on est amené à étudier séparément les trois cas :

▼ **Cas supersonique** $c(x,y) > a$

- $div\mathbf{c} = 0$. Les deux inégalités (28) s'écrivent

$$\alpha > 0 \text{ et } 4\alpha(c-a)(c+a) > 0$$

Pour ce cas, il suffit de choisir $\alpha > 0$.

- $div\mathbf{c} > 0$

α		$\frac{div\mathbf{c}}{2(c+a)}$		$\frac{div\mathbf{c}}{2c}$		$\frac{div\mathbf{c}}{2(c-a)}$	
$2\alpha c - div\mathbf{c}$	$-$		$-$		$+$		$+$
$2\alpha(c-a) - div\mathbf{c}$	$-$		$-$		$-$		$+$
$2\alpha(c+a) - div\mathbf{c}$	$-$		$+$		$+$		$+$

Il suffit de choisir

$$\alpha > \max_{(x,y)} \frac{div\mathbf{c}}{2(c-a)}$$

- $div\mathbf{c} < 0$

α		$\frac{div\mathbf{c}}{2(c-a)}$		$\frac{div\mathbf{c}}{2c}$		$\frac{div\mathbf{c}}{2(c+a)}$	
$2\alpha c - div\mathbf{c}$	$-$		$-$		$+$		$+$
$2\alpha(c-a) - div\mathbf{c}$	$-$		$+$		$+$		$+$
$2\alpha(c+a) - div\mathbf{c}$	$-$		$-$		$-$		$+$

Dans ce cas il suffit de choisir

$$\alpha > \max_{(x,y)} \frac{div\mathbf{c}}{2(c+a)}$$

▼ **Cas subsonique** $c(x,y) < a$

- $div\mathbf{c} = 0$. Les deux inégalités (28) s'écrivent

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \\ 4\alpha(c-a)(c+a) > 0 \end{cases}$$

Ici, c'est impossible de trouver un α vérifiant ces deux inégalités.
- $div\mathbf{c} > 0$

α		$\frac{div\mathbf{c}}{2(c-a)}$		$\frac{div\mathbf{c}}{2(c+a)}$		$\frac{div\mathbf{c}}{2c}$	
$2\alpha c - div\mathbf{c}$	$-$		$-$		$-$		$+$
$2\alpha(c-a) - div\mathbf{c}$	$+$		$-$		$-$		$-$
$2\alpha(c+a) - div\mathbf{c}$	$-$		$-$		$+$		$+$

Ici aussi, il n'y a pas de possibilités pour α

- $div\mathbf{c} < 0$

α		$\frac{div\mathbf{c}}{2c}$		$\frac{div\mathbf{c}}{2(c+a)}$		$\frac{div\mathbf{c}}{2(c-a)}$	
$2\alpha c - div\mathbf{c}$	$-$		$+$		$+$		$+$
$2\alpha(c-a) - div\mathbf{c}$	$+$		$+$		$+$		$-$
$2\alpha(c+a) - div\mathbf{c}$	$-$		$-$		$+$		$+$

Dans ce cas il suffit de choisir

$$\max_{(x,y)} \frac{div\mathbf{c}}{2(c+a)} < \alpha < \min_{(x,y)} \frac{div\mathbf{c}}{2(c-a)}.$$

▼ **Cas limite** $c(x,y) = a$. Les deux inégalités (28) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha c - div\mathbf{c} > 0 \\ \\ -div\mathbf{c}(4\alpha c - div\mathbf{c}) > 0. \end{array} \right. \tag{29}$$

- Si $div\mathbf{c} = 0$, pas de possibilité pour α.
- Si $div\mathbf{c} > 0$ pour que (29) soit vérifiée, on a besoin d'avoir

$$\frac{div\mathbf{c}}{2a} < \alpha < \frac{div\mathbf{c}}{4a}.$$

- Si $div\mathbf{c} < 0$, il suffit de choisir α positif

Remarque 3.2. *Pour le cas $div\mathbf{c} = 0$, même en effectuant le changement de variable $w = \widetilde{w}e^{\alpha x}$, le système ne devient positif au sens de Friedrichs que pour le cas supersonique.*

Dans ce travail on s'intéresse à la résolution du problème dans le cas où $\mathbf{c}$ est une constante ($div\mathbf{c} = 0$), sans avoir à effectuer de changement de variables. Pour cela on distinguera trois cas selon la position de c par rapport à la vitesse du son a.
Le champ $\mathbf{c} = (c,d)$ étant constant sur $\overline{\Omega}$. Comme $d = 0$ sur Γ_0 alors $d = 0$ dans $\overline{\Omega}$. Donc on linéarise autour d'un état fixe monodimensionnel.

Le problème (25) s'écrit alors sous la forme du système hyperbolique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Aw = A_x \dfrac{\partial w}{\partial x} + A_y \dfrac{\partial w}{\partial y} = F & \text{dans } \Omega \\ \\ (B - M)w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{30}$$

Avec

$$A_x = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{c}{a^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$w^t = (u,v,p) \quad ; \quad F = (f_1, f_2, f_3)$$

$$B = A_x n_x + A_y n_y.$$

Où $n = (n_x, n_y)$ représente la normale extérieure à $\partial\Omega$.
M est définie de telle sorte qu'elle soit semi-admissible et que les conditions aux limites restent vérifiées. Les matrices B et Msont définies de la façon suivante :

- Sur Γ_-

  — Si $c < a$,

$$B = \begin{pmatrix} -c & 0 & -1 \\ 0 & -c & 0 \\ -1 & 0 & -\dfrac{c}{a^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{2}{c} - \dfrac{c}{a^2}. \end{pmatrix}$$

— Si $c = a$,

$$B = \begin{pmatrix} -a & 0 & -1 \\ 0 & -a & 0 \\ -1 & 0 & -\dfrac{1}{a} \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{1}{a}. \end{pmatrix}$$

— Si $c > a$,

$$B = \begin{pmatrix} -c & 0 & -1 \\ 0 & -c & 0 \\ -1 & 0 & -\dfrac{c}{a^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{c}{a^2}. \end{pmatrix}$$

- Sur Γ_+

— Si $c < a$,

$$B = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{c}{a^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{2}{c} - \dfrac{c}{a^2}. \end{pmatrix}$$

— Si $c = a$,

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{1}{a}. \end{pmatrix}$$

— Si $c > a$,

$$B = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{c}{a^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{c}{a^2}. \end{pmatrix}$$

- Sur Γ_2,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta > 0.$$

- Sur Γ_1,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta > 0.$$

On a alors

$$Ker(B - M) + Ker(B + M) = \mathbb{R}^3 \tag{31}$$

Remarque 3.3. *Le système n'est pas positif au sens de Friedrichs, car la matrice C de la définition (2.1) est identiquement nulle.*

Bien que le système ne soit pas positif au sens de Friedrichs, il est possible de démontrer l'existence d'une solution faible. Pour cela, on s'inspirera de la démonstration du théorème (2.1). Ce sera l'objet du paragraphe qui suit.

3.4 Existence d'une solution faible pour l'Éqution d'Euler isentrope linéarisée

3.4.1 Existence d'une solution faible pour $c < a$

Dans ce cas **le problème adjoint s'écrit** :

$$A^*\varphi = F^* \qquad \text{dans } \Omega$$

$$(B + M^*)\varphi = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

où

$$A^*\varphi = -A_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} - A_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Les matrice B et M^* sont définies comme suit :

- Sur Γ_-,

$$B = \begin{pmatrix} -c & 0 & -1 \\ 0 & -c & 0 \\ -1 & 0 & -\dfrac{c}{a^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad M^* = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{2}{c} - \dfrac{c}{a^2}. \end{pmatrix}$$

- Sur Γ_+,

$$B = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{c}{a^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad M^* = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{2}{c} - \dfrac{c}{a^2}. \end{pmatrix}$$

- Sur Γ_2,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta > 0.$$

- Sur Γ_1,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta > 0.$$

Pour la suite de ce travail, nous posons

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^2(\Omega) &= (\mathbf{L}^2(\Omega))^3 \\ \mathbb{H}^k(\Omega) &= (\mathbf{H}^k(\Omega))^3 \quad k \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}) &= (\mathbf{C}^1(\overline{\Omega}))^3 \end{aligned}$$

Théorème 3.1. *Pour tout $F \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, le problème (30) admet au moins une solution faible $w \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ telle que*

$$|w|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq cte|F|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 3.1. *Si $\varphi \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$ est une solution du problème adjoint, alors elle est unique*

Soit
$$\mathbf{V} = \left\{\mathbf{v}; \mathbf{v} = A^*\varphi, \ \ \varphi \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}) \ \ ,(B + M^*)\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$$
un sous-espace de $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Lemme 3.2. *La fonctionnelle $L(.)$ définie sur $\mathbf{V}$ par :*

$$L(\mathbf{v}) = (f, \varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

est linéaire continue pour la norme de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Elle vérifie en plus :

$$|L(\mathbf{v})| \leq \alpha |F|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} |\mathbf{v}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

où α est une constante.

Preuve du Théorème (3.1.) D'après le lemme (3.1), à tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ on associe de façon unique $\varphi \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$ et d'après le lemme (3.2), la fonctionnelle $L(.)$ définie sur $L(\mathbf{v}) = (F, \varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ vérifie :

$$|L(\mathbf{v}| \leq \alpha |F|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} |\mathbf{v}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \tag{32}$$

Grâce au théorème de Hahn-Banach, on peut la prolonger sur $\mathbb{L}^2(\Omega)$ par une application linéaire continue $\overline{L}$ vérifiant :

$$\|\overline{L}\| = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{|L(\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}}.$$

L'inégalité (32) entraîne alors
$$\|\overline{L}\| \leq \alpha |F|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$
Par le théorème de Riesz,

$$\left\{ \begin{array}{c} \exists \overline{w} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ tel que } |\overline{w}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|\overline{L}\| \\ \\ \overline{L}(\mathbf{v}) = (\overline{w}, \mathbf{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \end{array} \right.$$

Donc pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$,
$$(\overline{w}, \mathbf{v})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \overline{L}(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}),$$
ou encore
$$\left\{ \begin{array}{l} (\overline{w}, A^*\varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \ \ \forall \varphi \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}) \\ \\ \quad (B + M^*)\varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$
ce qui prouve que $\overline{w}$ est une solutiopn faible au sens de la définition(2.5) $\square$

Preuve du Lemme (3.2.) Soit $(\mathbf{v})^t = (Z_1, Z_2, Z_3)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ et on a

$$L(\mathbf{v}) = (f, \varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

où φ vérifie $A^*\varphi = \mathbf{v}$, ce qui nous donne le système suivant :

$$(S_3)\left\{\begin{array}{c} c\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x} = -Z_1 \\[2ex] c\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial y} = -Z_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \dfrac{c}{a^2}\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -Z_3 \end{array}\right.$$

La condition $(B + M^*)\varphi = 0$ implique

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \cup \Gamma_0 \\ \varphi_3 = 0 & \text{sur } \Gamma_- \\ c\varphi_1 + \varphi_3 = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \end{array}\right.$$

Si on multiplie la deuxième équation du système (S_3) par $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}$ et on intègre sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega \left(c\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}\right) dxdy = -\int_\Omega Z_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dxdy \tag{33}$$

Montrons que :

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} dxdy = \int_\Omega \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} dxdy$$

Posons

$$W = \left\{\varphi \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \cup \Gamma_0\right\}$$

et considérons l'espace

$$\widetilde{W} = \left\{\varphi \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \cup \Gamma_0\right\}$$

$\widetilde{W}$ est dense dans W. Comme $\varphi_2 \in W$, alors il existe une suite $\varphi_n \in \widetilde{W}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{c} \varphi_n \to \varphi_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x} \to \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial y} \to \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{array}\right.$$

pour la norme dans $\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$.
En utilisant deux fois la formule de green, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\,\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}\,dxdy &= -\int_\Omega \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y \partial x}\,\varphi_3\,dxdy + \int_{\partial\Omega} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\,n_y\,ds \\ &= \int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\,\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\,dxdy + \int_{\partial\Omega} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\,n_y\,ds - \int_{\partial\Omega} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\,n_x\,ds \end{aligned}$$

Or $n_x = 0$ sur Γ_0, $\varphi_n = 0$ sur Γ_+ et $\varphi_3 = 0$ sur Γ_-, donc

$$\int_{\partial\Omega} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\,n_x\,ds = \int_{\Gamma_\pm} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\,n_x\,ds = 0$$

de même $n_y = 0$ sur $\Gamma_\pm$ et $\varphi_n = 0$ sur Γ_0, donc

$$\int_{\partial\Omega} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\; n_y\; ds = \int_{\Gamma_0} \varphi_3 \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\; n_y\; ds = 0$$

et par suite

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}\;\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} dxdy = \int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}\;\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\; dxdy.$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\;\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}\; dxdy = \int_\Omega \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\;\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\; dxdy$$

L'équation(33) s'écrit alors

$$\int_\Omega \left(c\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \;\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\;\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\right)\; dxdy = -\int_\Omega Z_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\; dxdy \tag{34}$$

En retranchant de la première équation du système (S_3) le produit de la troisième équation par c, on obtient :

$$\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + c\;\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -cZ_3 + Z_1$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} &= \frac{a^2}{c^2 - a^2}\left(-cZ_3 + Z_1 - c\;\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)\\
&= \frac{ca^2}{a^2 - c^2}\;\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{a^2}{c^2 - a^2}\left(-cZ_3 + Z_1\right)
\end{aligned}$$

En remplaçant l'expression de $\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x}$ dans l'équation(34), on obtient :

$$c\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{a^2}{a^2 - c^2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2\right) dxdy = \int_\Omega \left(Z_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{a^2}{a^2 - c^2}(-cZ_3 + Z_1)\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) dxdy$$

On en déduit :

$$c\left(\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{a^2}{a^2 - c^2}\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right) \leq \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} |Z_2|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{a^2}{a^2 - c^2}\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \left(|Z_1|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + c\,|Z_3|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right).$$

Comme $c < a$ alors $\dfrac{a^2}{a^2 - c^2} > 1$ et donc

$$c\left(\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right) \leq \frac{a^2}{a^2 - c^2}\left(\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} |Z_2|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \left(|Z_1|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + c\,|Z_3|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)\right).$$

Soit $\beta = \max(c, 1)$, on a alors :

$$\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \frac{\beta a^2}{c(a^2 - c^2)}\left(\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} |Z_2|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \left(|Z_1|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + |Z_3|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)\right)$$

En posant $\alpha_2 = \dfrac{\beta a^2}{c(a^2-c^2)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
|\nabla\varphi_2|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq \alpha_2 \left(\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \left(|Z_1|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + |Z_2|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + |Z_3|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \\
&\leq 2\alpha_2 \left(\left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(|Z_1|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + |Z_2|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + |Z_3|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ou encore

$$|\nabla\varphi_2|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 2\alpha_2 \, |\mathbf{v}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

mais comme $\varphi_2 = 0$ sur Γ_0, le théorème de Poincaré nous donne :

$$|\varphi_2|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \delta \, |\nabla\varphi_2|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq 2\alpha_2\delta \, |\mathbf{v}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

En multipliant cette fois-ci la troisième équation du système (S_3) par $\dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x}$ et en intégrant sur Ω, on obtient :

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{c}{a^2}\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) dxdy = -\int_\Omega Z_3\, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\, dxdy.$$

D'après la première équation du système (S_3), on a $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \dfrac{1}{c}\left(-Z_1 - \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial x}\right)$ ce qui implique :

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{c}\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) dxdy = -\int_\Omega \left(Z_3 - \frac{1}{c}Z_1\right) \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\, dxdy.$$

Or on a déja montré que

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\, \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\, dxdy = \int_\Omega \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\, \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}\, dxdy$$

donc

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{c}\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\, \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right) dxdy = -\int_\Omega \left(Z_3 - \frac{1}{c}Z_1\right) \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\, dxdy.$$

Par ailleurs d'après la deuxième équation du système (S_3) on a

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(-Z_2 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}\right)$$

ce qui implique

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\, \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}\, dxdy = \int_\Omega \frac{1}{c}\left(-Z_2 - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}\right) \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}\, dxdy.$$

On peut alors écrire :

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{c}\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}\right)^2 \right) dxdy = \int_\Omega \left(\left(-Z_3 + \frac{1}{c}Z_1\right) \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{1}{c}Z_2\, \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right) dxdy$$

ou encore

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\int_\Omega\left(\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right)^2\right)dxdy=\int_\Omega\left((cZ_3-Z_1)\,\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}-Z_2\,\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\right)dxdy.$$

φ_3 étant nulle sur Γ_-, la suite de la démonstration se fait pareillement que pour φ_2. On obtient alors l'estimation

$$|\varphi_3|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\leq\alpha_3\,|\mathbf{v}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,.$$

Enfin d'après la première équation du système (S_3) on a :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(c\varphi_1+\varphi_3)\right|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}=|Z_1|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

Or $(c\varphi_1+\varphi_3)\in\mathbf{C}^1(\Omega)$ et $(c\varphi_1+\varphi_3)=0$ sur Γ_+, donc

$$|c\varphi_1+\varphi_3|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\leq cte(\Omega)\left|\frac{\partial}{\partial x}\,(c\varphi_1+\varphi_3)\right|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\leq cte(\Omega)\,|Z_1|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

Comme $\varphi_1=\dfrac{1}{c}\,(c\varphi_1+\varphi_3)-\dfrac{1}{c}\varphi_3$, alors

$$|\varphi_1|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\leq\frac{1}{c}\left(|c\varphi_1+\varphi_3|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+|\varphi_3|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\right)\leq\alpha_1\,|\mathbf{v}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

et donc

$$|L(\mathbf{v})|\leq|f|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,|\varphi|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\leq\alpha\,|f|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\,|\mathbf{v}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

montrant ainsi la continuité de L. ■

Preuve du lemme (3.1) Pour montrer l'unicité de la solution du problème adjoint, il suffit de montrer :

$$\left.\begin{array}{r}A^*\varphi=0\\[2ex](B+M^*)\varphi=0\text{ sur }\partial\Omega\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi=0$$

Si $A^*\varphi=0$ d'après le lemme (3.2), $|\varphi|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\leq 0$, donc $\varphi=0$ ■

3.4.2 Existence d'une solution faible pour $c>a$

Dans ce cas **le problème adjoint s'écrit** :

$$\begin{array}{rl}A^*\varphi=Z & \text{dans }\Omega\\[2ex](B+M^*)\varphi=0 & \text{sur }\partial\Omega\end{array}\tag{35}$$

où

$$A^*\varphi=-A_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}-A_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

et les matrice B et M^* sont définies comme suit :

- Sur Γ_-,

$$B=\begin{pmatrix}-c & 0 & -1\\ 0 & -c & 0\\ -1 & 0 & -\dfrac{c}{a^2}\end{pmatrix}\quad;\quad M^*=\begin{pmatrix}c & 0 & 1\\ 0 & c & 0\\ 1 & 0 & \dfrac{c}{a^2}\end{pmatrix}$$

- Sur Γ_+,

$$B = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{c}{a^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad M^* = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{c}{a^2} \end{pmatrix}$$

- Sur Γ_2,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta > 0$$

- Sur Γ_1,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta > 0$$

Remarque 3.4. *Les conditions aux limites pour le cas $c > a$ sont différentes de celles pour le cas $c < a$ ce qui explique le fait que la matrice M^* n'est pas la même dans les deux cas.*

Théorème 3.2. *Pour tout $F \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, le problème (30) admet au moins une solution faible $w \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ telle que*

$$|w|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq cte|F|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}.$$

Preuve. La démonstration est la même que celle du théorème (3.1). Il reste seulement à montrer que les deux lemmes (3.1) et (3.2) sont vérifiés.
En effet si on pose $\varphi = e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, le problème (37) s'écrit :

$$\begin{aligned} A^*\psi &= e^{\alpha x} Z \qquad \text{dans } \Omega \\ (B + M^*)\psi &= 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{36}$$

où

$$A^*\psi = -A_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - A_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + A_0 \psi.$$

avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} c\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & c\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \dfrac{c\alpha}{a^2} \end{pmatrix}, \quad A_x = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \dfrac{c}{a^2} \end{pmatrix} \text{ et } A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système (36) est positif au sens de Friedrichs puisque la matrice C de la définition (2.1) est égale à $2A_0$ qui est définie positive, donc d'après le lemme (2.5) il y a unicité de la solution du problème (36) dans $\mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$ et en plus

$$|\psi|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq cte\,|Z|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$$

ce qui implique que $|\varphi|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq |Z|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$ prouvant ainsi les lemmes (3.1) et (3.2) $\square$

Remarque 3.5. *Nous n'avons pas modifié le problème direct. On a juste utilisé une procédure pour montrer l'unicité du problème adjoint.*

3.4.3 Existence d'une solution faible pour $c = a$

Pour ce cas, le problème s'écrit

$$A_x \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} + A_y \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad \text{où } F^t = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{L}^2(\Omega)$$

avec

$$\begin{cases} au + p = 0 & \text{sur } \Gamma_- \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_- \end{cases}$$

et **le problème adjoint** s'écrit :

$$\begin{aligned} A^*\varphi &= Z & \text{dans } \Omega \\ (B + M^*)\varphi &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{37}$$

où

$$A^*\varphi = -A_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - A_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Les matrice B et M^* sont définies comme suit :

- Sur Γ_-,

$$B = \begin{pmatrix} -a & 0 & -1 \\ 0 & -a & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad ; \quad M^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

- Sur Γ_+,

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad ; \quad M^* = \begin{pmatrix} c & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & \frac{c}{a^2} \end{pmatrix}$$

- Sur Γ_2,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta > 0$$

- Sur Γ_1,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad M^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \beta > 0$$

Théorème 3.3. *Soit $F \in \mathbb{L}^2(\Omega)$. Sous réserve que $f_1 - af_3 = 0$ le problème (30) admet au moins une solution faible $w \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ telle que*

$$|w|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq cte\, |F|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

Preuve. Soit l'espace

$W = \left\{\varphi \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega}), \varphi^t = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \text{ tel que } a\varphi_1 + \varphi_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \text{ et } \varphi_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \cup \Gamma_0\right\}$

$A^*\varphi = 0$ implique

$$-a\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 0 \tag{38}$$

$$-a\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 0 \tag{39}$$

$$-\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \tag{40}$$

En retranchant de l'équation (38) le produit de l'équation (40) par a, on trouve

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0$$

et comme φ_2 est nulle sur Γ_0, alors

$$\varphi_2 = 0 \text{ sur } \overline{\Omega}.$$

De l'équation (39), on déduit que

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 0$$

ce qui implique que

$$\varphi_3 = g(x)$$

g est une fonction ne dépendant que de x.
D'après l'équation (38) on a

$$\frac{\partial}{\partial x}(a\varphi_1 + \varphi_3) = 0$$

et comme $a\varphi_1 + \varphi_3 = 0$ sur Γ_+, on obtient

$$a\varphi_1 + \varphi_3 = 0 \text{ sur } \overline{\Omega} \text{ c'est à dire } \varphi_1 = -\frac{1}{a}\varphi_3 = -\frac{1}{a}g(x).$$

Donc

$$KerA^* = \{\varphi \in W \text{ tel que } a\varphi_1 + \varphi_3 = 0,\ \varphi_1 = g(x) \text{ et } \varphi_2 = 0\}$$

On considère l'espace quotient $\widetilde{W} = W \diagup KerA^*$ et on pose

$$V = \left\{v = A^*\varphi,\ \dot{\varphi} \in \widetilde{W}\right\}$$

φ étant un représentant de $\dot{\varphi}$.
Nous allons montrer que pour tout $v \in V$, il existe un unique $\dot{\varphi} \in \widetilde{W}$ tel que

$$A^*\varphi = v.$$

Pour cela nous allons vérifier que

$$\left(A^*\varphi = 0,\ \dot{\varphi} \in \widetilde{W}\right) \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{0}.$$

En effet

$$(A^*\varphi = 0) \Rightarrow \varphi \in KerA^* \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{0}.$$

Soit maintenant v un élément de V, on lui associe alors l'unique solution $\dot{\varphi} \in \widetilde{W}$ du système $A^*\varphi = v$ et on pose

$$L(v) = \int_\Omega F\varphi dxdy = \int_\Omega (\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \varphi_3 f_3)\, dxdy.$$

Comme $f_1 - af_3 = 0$, l'application est bien définie.

<u>Montrons que L est linéaire et continue</u>

On a

$$L(v) = \int_\Omega (\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \varphi_3 f_3)\, dxdy.$$

Comme $f_1 - af_3 = 0$, alors

$$\begin{aligned} L(v) &= \int_\Omega ((a\varphi_1 + \varphi_3)\, f_3 + \varphi_2 f_2 +)\, dxdy \\ &\leq |a\varphi_1 + \varphi_3|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} |f_3|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + |\varphi_2|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} |f_2|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Par ailleurs $A^*\varphi = v$ donc :

$$a\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = -v_1 \tag{41}$$

$$a\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = v_2 \tag{42}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = v_3 \tag{43}$$

En retranchant de l'équation (43)le produit de l'équation (41) par $\dfrac{1}{a}$, on obtient :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = v_3 - \frac{1}{a}v_1$$

et

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2 dxdy \qquad &= \int_\Omega \left(v_3 - \frac{1}{a}v_1\right)^2 dxdy \\ &\leq 2\left(\int_\Omega \left(v_3^2 + \frac{1}{a^2}v_1^2\right)^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Comme $\varphi_2 = 0$ sur Γ_0 alors :

$$\begin{aligned} |\varphi_2|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq cte \left|\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq 2cte \left(\int_\Omega \left(v_3^2 + \frac{1}{a^2}v_1^2\right)^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De même $\dfrac{\partial}{\partial x}(a\varphi_1 + \varphi_3) = -v_1$ et $a\varphi_1 + \varphi_3 = 0$ sur Γ_+, entraînent :

$$\begin{aligned} |a\varphi_1 + \varphi_3|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq cte \left|\frac{\partial}{\partial x}(a\varphi_1 + \varphi_3)\right|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq cte\, |v_1|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq cte \left(|v_1|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} |f_3|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \left(\int_\Omega \left(v_3^2 + \frac{1}{a^2} v_1^2 \right)^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}} |f_2|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right) \\ &\leq cte\, |v|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} |F|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

L'application L est donc linéaire et continue.
Maintenant, d'après le théorème de Hahn-Banach, on peut la prolonger sur $\mathbb{L}^2(\Omega)$ par une application linéaire continue $\overline{L}$ vérifiant :

$$\|\overline{L}\| = \sup_{v \in \mathbb{L}^2(\Omega)_{v \neq 0}} \frac{|L(v)|}{|v|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}} \leq \alpha\, |F|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} .$$

Grâce au théorème de Riesz,

$$\begin{cases} \exists \overline{w} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ tel que } |\overline{w}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \|\overline{L}\| \\ \overline{L}(v) = (\overline{w}, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Donc pour tout $v \in V$, $(\overline{w}, v)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \overline{L}(v) = L(v)$.
C'est à dire

$$(\overline{w}, A^*\varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = (F, \varphi)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad \forall \dot{\varphi} \in \widetilde{W} \tag{44}$$

Si on interprète cette égalité, au sens des distributions, on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (a\overline{w}_1 + \overline{w}_3)}{\partial x} = f_1 & (*) \\ a\dfrac{\partial \overline{w}_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{w}_3}{\partial y} = f_2 & (**) \\ \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial (a\overline{w}_1 + \overline{w}_3)}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{w}_2}{\partial y} = f_3 & (***) \end{cases}$$

Comme $f_1 - af_3 = 0$, on obtient $\dfrac{\partial \overline{w}_2}{\partial y} = 0$.
Quelque soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a alors

$$\left\langle a\frac{\partial \overline{w}_2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w}_3}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle = \left\langle f_2, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle .$$

Or

$$\left\langle a\frac{\partial \overline{w}_2}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle = -\left\langle \overline{w}_2, a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right\rangle = \left\langle a\frac{\partial \overline{w}_2}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\rangle = 0,$$

donc

$$\left\langle \frac{\partial \overline{w}_3}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle = \left\langle f_2, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\rangle \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

c'est à dire

$$\frac{\partial \overline{w}_3}{\partial y} = f_2 \text{ au sens de } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Maintenant d'après (**), on obtient

$$\frac{\partial \overline{w}_2}{\partial x} = 0,$$

et par suite $\overline{w}_2$ est une constante, montrant ainsi que :

$$\frac{\partial(a\overline{w}_1+\overline{w}_3)}{\partial x} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \frac{\partial \overline{w}_3}{\partial y} \in \mathbb{L}^2(\Omega) \text{ et } \overline{w}_2 \text{ est une constante.}$$

On peut donc utiliser la formule de Green dans l'égalité (44) et avoir

$$\int_\Omega (f,\varphi)dxdy = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{a}\tfrac{\partial(a\overline{w}_1+\overline{w}_3)}{\partial x}(a\varphi_1+\varphi_3) + \tfrac{\partial \overline{w}_3}{\partial y}\varphi_2\right)dxdy$$
$$-\int_{\Gamma_0}(\overline{w}_2\varphi_3+\overline{w}_3\varphi_2)n_y dx - \int_{\Gamma_\pm}\left(\tfrac{1}{a}(a\overline{w}_1+\overline{w}_3)(a\varphi_1+\varphi_3)+a\overline{w}_2\varphi_2\right)n_x dy.$$

d'où

$$\int_{\Gamma_0}(\overline{w}_2\varphi_3+\overline{w}_3\varphi_2)n_y dx + \int_{\Gamma_\pm}\left(\frac{1}{a}(a\overline{w}_1+\overline{w}_3)(a\varphi_1+\varphi_3)+a\overline{w}_2\varphi_2\right)n_x dy = 0.$$

Comme $\dot{\varphi} \in \widetilde{W}$, donc

$$a\varphi_1+\varphi_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_+ \text{ et } \varphi_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \sqcup \Gamma_+,$$

obtenant ainsi

$$\int_{\Gamma_0}(\overline{w}_2\varphi_3)n_y dx + \int_{\Gamma_-}\left(\frac{1}{a}(a\overline{w}_1+\overline{w}_3)(a\varphi_1+\varphi_3)+a\overline{w}_2\varphi_2\right)n_x dy = 0. \tag{45}$$

Si on prend dans (45), $\varphi_1 = \varphi_3 = 0$, on aura

$$\int_{\Gamma_-} a\overline{w}_2\varphi_2 n_x dy = 0,$$

$\overline{w}_2$ étant une constante, on obtient alors

$$\overline{w}_2\int_{\Gamma_-} a\varphi_2 n_x dy = 0,$$

donc $\overline{w}_2 = 0$ sur Γ_-.

De la même manière si on prend dans (45), $a\varphi_1+\varphi_3 = 0$, on montre que $\overline{w}_2 = 0$ sur Γ_0. L'équation (45) devient alors

$$\int_{\Gamma_-}\frac{1}{a}(a\overline{w}_1+\overline{w}_3)(a\varphi_1+\varphi_3)n_x dy = 0.$$

Comme $\dfrac{\partial(a\overline{w}_1+\overline{w}_3)}{\partial x} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ et $(a\varphi_1+\varphi_3) \in \mathbb{C}^1(\overline{\Omega})$, on déduit que :

$$a\overline{w}_1+\overline{w}_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_-,$$

donc $\overline{w}$ vérifie les conditions aux limites. $\square$

Références

[1] R. Dautrey et J. L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Vol 9 : Evolution, numérique, transport*, Elsevier Masson, 1988.

[2] K. O Friedrichs, *Symmetric positive linear differential equations*, Comm.Pure Appl.Math.11 (1958), 333-418.

[3] P. Lascaux, *Numerical method for time dependent equations. Applications to fluid flow problems*, Tata Institute of fundamental research, Bombay 1976.

[4] P. Lesaint, *Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'élémentts finis.* Thèse de doctorat d'état, Univ.Pariqs VI, Paris, 1975.

[5] P. D. Lax et RS. Phillips, *Local bondary conditions for dissipative symmetric linear differential operators.*Comm. Pure Appl.Math. 13 (1960), 427-455.

[6] RS. Phillips et L. Sarason, *Singular symmetric positive first order differential operators.* Journal of Mathematics and Mechanics 15 (1966), 235-271.

[7] I. Ryhming, *Dynamique des fluides.* Presse polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

[8] L. Renggli, *Résolution numérique d'équations de Navier-Stokes parabolisées par des méthodes d'éléments finis.* Thèse de doctorat, Ecole polytechnique Fédérale de Lausanne, 1993.

Author's address :

Samira Khatmi
Université Chouaib Doukkali,
Faculté des Sciences Juridiques Economiques et Sociales,
Largess, Maroc.
E-mail : khatmi.samira@ucd.ac.ma