

## Probleme propuse \* Setul 7

**61. (determinanți)** Fie matricea  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  cu elementele  $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+1}, & 1 \leq j \leq i \leq 3 \\ 0, & 1 \leq i < j \leq 3. \end{cases}$

Determinantul lui  $A$  are valoarea

a)  $\frac{1}{24}$ ; b) 1; c) 2; d)  $\frac{1}{12}$ ; e)  $\frac{1}{6}$ ; f)  $\frac{1}{3}$ .

**62. (sisteme liniare)** Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  și  $C = BAB^{-1}$ .

Să se determine matricea  $C^{20}$ .

a)  $\begin{pmatrix} 3^{20} & 2^{20} - 3^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix}$ ; b)  $\begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 3^{20} \end{pmatrix}$ ; c)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  
d)  $\begin{pmatrix} 2^{20} & 0 \\ 3^{20} - 2^{20} & 3^{20} \end{pmatrix}$ ; e)  $\begin{pmatrix} 0 & 2^{20} \\ 3^{20} & 0 \end{pmatrix}$ ; f)  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

**63. (sisteme liniare)** Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}$  și fie sistemul  $\begin{cases} x + y + z = c \\ ax + by + (a + b)z = 0 \\ a^2x + b^2y + (a + b)^2z = 0. \end{cases}$

Care afirmație este adevărată ?

- a) Dacă  $a = b$ , atunci sistemul este compatibil pentru orice  $c \in \mathbb{R}$ .  
b) Dacă  $a = 0$  și  $b \neq 0$ , atunci sistemul este compatibil pentru orice  $c \in \mathbb{R}$ .  
c) Dacă  $a \neq b$ , atunci sistemul este compatibil determinat, pentru orice  $c \in \mathbb{R}$ .  
d) Dacă  $c \neq 0$ , atunci sistemul este incompatibil pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ .  
e) Dacă  $a \neq 0$  și  $b \neq 0$ , atunci sistemul este incompatibil pentru orice  $c \in \mathbb{R}$ .  
f) Dacă  $a + b \neq 0$ , atunci sistemul este compatibil determinat  $\forall c \in \mathbb{R}$ .

**64. (șiruri)** Fie  $x_n = (\sqrt{2} + 1)^n$ . Pentru orice  $n \geq 1$  există numere naturale  $a_n, b_n$  astfel încât  $x_n = a_n + b_n\sqrt{2}$ . Să se calculeze  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ .

a)  $\ell = 0$ ; b) nu există; c)  $\ell = \sqrt{2}$ ; d)  $\ell = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; e)  $\ell = \infty$ ; f)  $\ell = -\sqrt{2}$ .

**65. (limite)** Fie  $\ell = \lim_{x \nearrow 1} (1-x)^2 f(x) - \lim_{x \searrow 1} f(x)$ , unde  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , iar  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}, & x \leq 1 \\ e^{n(1-x)}, & x > 1 \end{cases}. \text{ Atunci } \ell \text{ este}$$

a) 0; b) -1; c) 1; d)  $\infty$ ; e) nu există; f)  $-\infty$ .

**66. (derivabilitate)** Să se arate că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

este indefinit derivabilă pe  $\mathbb{R}$  și să se calculeze  $f^{(n)}(0)$  pentru  $n \geq 1$ .

a) 1; b) 0; c)  $e^{-1}$ ; d) -1; e)  $\ln 2$ ; f)  $e + e^{-1}$ .

**67. (primitive)** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și  $F$  o primitivă a sa. Dacă  $F(x) \cdot f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ , și  $F(0) = 1$ , atunci  $f(x)$  are expresia

a)  $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ; b)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$ ; c)  $f(x) = \sqrt{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ ;  
d)  $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ ; e)  $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ; f)  $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**68. (funcții trigonometrice)** Perioada principală  $T$  a funcției  $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$  este

a)  $T = 2\pi$ ; b)  $T = \pi$ ; c)  $T = \frac{\pi}{2}$ ; d)  $T = \frac{\pi}{3}$ ; e)  $T = \frac{\pi}{4}$ ; f)  $T = \frac{\pi}{6}$ .

**69. (aplicțiile trigonometriei în algebră)** Dacă  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile ecuației  $x^2 + x + 1 = 0$ , să se determine pentru câte valori  $n \in \mathbb{N}, n \leq 10$ , avem egalitatea  $(x_1 + 1)^n + (x_2 + 1)^n = -1$ .

a) 0; b) 2; c) 4; d) 10; e) 8; f) nu există astfel de valori.

**70. (poliedre - volume)** Un trunchi de piramidă regulată are bazele pătrate de laturi  $a$  și  $b$  ( $a > b$ ), iar înălțimea este  $h$ . Calculați înălțimea piramidei din care s-a format acest trunchi de piramidă.

a)  $\frac{ah}{a-b}$ ; b)  $\frac{b}{a}h$ ; c)  $\frac{a}{b}h$ ; d)  $\frac{ah}{a+b}$ ; e)  $\frac{bh}{a+b}$ ; f)  $\frac{bh}{a-b}$ .