

## Probleme propuse \* Setul 5

**41. (determinanți)** Fie ecuația  $x^3 + px + q = 0$ , având soluțiile  $x_1, x_2, x_3$  și determinantul

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}.$$

Atunci valoarea lui  $\Delta^2$  este

a)  $p^3 + q^3$ ; b) 0; c)  $-p^2 + 2q^3$ ; d)  $4p^3 + 27q^2$ ; e)  $27q^2$ ; f)  $-4p^3 - 27q^2$ .

**42. (structuri algebrice)** Fie  $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ . Se consideră  $x * y = x^{\ln y}$ ,  $x, y \in G$ . Care dintre următoarele afirmații este adevărată ?

a) legea  $*$  nu este asociativă; b) legea  $*$  este asociativă dar nu este comutativă; c)  $G$  nu este parte stabilă în raport cu legea  $*$ ; d)  $(G, *)$  este grup abelian; e) legea  $*$  nu admite element neutru; f) există un singur element simetrizabil.

**43. (polinoame)** Pentru ce valori ale lui  $a \in \mathbb{Z}_3$  polinomul  $\hat{2}X^3 + (a + \hat{2})X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$  este ireductibil în  $\mathbb{Z}_3[X]$  ?

a)  $a = \hat{1}$ ; b)  $a = \hat{2}$ ; c)  $a = \hat{0}$ ; d)  $a \neq \hat{1}$ ; e)  $a \neq \hat{2}$ ; f)  $a \neq \hat{0}$ .

**44. (șiruri)** Fie  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[nx]}{n}$ ,  $x \in (0, 1)$ , unde  $[nx]$  este partea întreagă a lui  $nx$ . Atunci

a)  $\ell = 0$ ; b)  $\ell = x$ ; c)  $\ell = 1 - x$ ; d)  $\ell = 1$ ; e)  $\ell = \frac{x}{2}$ ; f)  $\ell = x^2$ .

**45. (continuitate)** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ . Atunci

a)  $f$  este continuă; b)  $x = 0$  este punct de discontinuitate de speța întâi; c)  $f$  nu are proprietatea lui Darboux; d)  $f$  are proprietatea lui Darboux; e)  $f$  este discontinuă într-un număr infinit de puncte; f) toate afirmațiile precedente sunt false.

**46. (derivabilitate)** Găsiți toate funcțiile derivabile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care satisfac

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

a)  $e^x$ ; b)  $ax$ ; c)  $\ln x$ ; d)  $ax + b$ ; e)  $\sin x$ ; f)  $\cos x$ .

**47. (derivabilitate)** Se consideră o funcție continuă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  și o funcție derivabilă  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $x'(t) = f(x(t)) - 1$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$  și  $\ell = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  există și este finită, iar  $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$ . Să se calculeze  $f(\ell)$ .

a) 1; b) 0; c) -1; d)  $\infty$ ; e) e; f) 2.

**48. (funcții trigonometrice)** Fie  $E = \sin \left( \arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{15}{17} \right)$ . Atunci

a)  $E = \frac{34}{35}$ ; b)  $E = \frac{84}{85}$ ; c)  $E = \frac{83}{85}$ ; d)  $E = \frac{13}{85}$ ; e)  $E = \frac{27}{85}$ ; f)  $E = \frac{36}{85}$ .

**49. (funcții trigonometrice)** Fie  $E = \frac{\cos a + \cos b}{2} - \cos \frac{a+b}{2}$ . Atunci, pentru orice  $a, b \in (0, \frac{\pi}{2})$ , avem

a)  $E \geq 0$ ; b)  $E > 0$ ; c)  $E \leq 0$ ; d)  $E < 0$ ; e)  $E = 0$ ; f)  $E \in [0, 1]$ .

**50. (ecuații trigonometrice)** Să se determine  $x$  dacă  $\sin \left( \frac{\arccos x}{3} \right) = 1$ .

a) ecuația nu are soluție; b) -1; c) 0; d)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; e)  $\frac{1}{2}$ ; f)  $\cos 3$ .