

Probleme propuse * Setul 2

11. (sisteme) Aflați parametrul $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{xy}{x+y} < 0$, unde (x, y) este o soluție oarecare a sistemului

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 2(x+y) = 25a \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

a) $a < 0$; b) $a > 0$; c) $a \in (0, \frac{\sqrt{7}}{5})$; d) $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}) \cup (\frac{\sqrt{7}}{5}, \infty)$;

e) $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}) \cup (1, \infty)$; f) $a \in (-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5}) \cup (0, \frac{\sqrt{7}}{5})$.

12. (mulțimi) Fie $A = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ și $\alpha = \sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}}$. Atunci

a) $\alpha \notin A$; b) $\alpha \in A$; c) $\alpha^2 = 1$; d) $\alpha^3 = 1$; e) $\alpha < 0$; f) $\alpha > 1$.

13. (mulțimi) Numerele $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ au proprietatea că există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 x_2 = \alpha$ și $|x_1 - x_2| = \beta$. Atunci

a) $\alpha \geq \beta$; b) $4\alpha - \beta^2 \leq 0$; c) $\beta^2 + 4\alpha \geq 0$; d) $\beta^2 - 4\alpha \geq 0$; e) $\beta^2 \geq \alpha$; f) $\alpha = \beta$.

14. (șiruri) Să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^{1/n} - 1)}{\ln n}$.

a) 1; b) e; c) $1/e$; d) $e - 1$; e) 2; f) $1/2$.

15. (derivabilitate) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Punctele de derivabilitate ale lui f sunt

a) 0; b) \mathbb{R} ; c) nu există; d) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; e) $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{2}{\pi}\}$; f) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

16. (derivabilitate) Fie $f : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ o funcție derivabilă, inversabilă, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, și $g : [\alpha, \beta] \rightarrow$

$[a, b]$ inversa sa. Atunci $I = \int_a^b f(x) dx + \int_\alpha^\beta g(y) dy$ are valoarea

a) $b\beta + a\alpha$; b) $b\beta - a\alpha$; c) $a\beta + b\alpha$; d) $a\beta - b\alpha$; e) $ab + \alpha\beta$; f) $ab - \alpha\beta$.

17. (primitive) Să se determine $F'(x)$ dacă $F(x) = \int_c^{b(x)} f(t) dt$ unde $b : [a, \beta] \rightarrow [c, d]$ derivabilă pe (α, β) și $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe $[c, d]$.

a) $F'(x) = f(b(x))$; b) $F'(x) = f'(b(x)) - f(c)$; c) $F'(x) = f'(b(x))$;

d) $F'(x) = f(b(x))b'(x)$; e) $F'(x) = f(b(x))b'(x) - f(c)$; f) $F'(x) = f'(b(x))b'(x)$.

18. (ecuații trigonometrice) Fie ecuațiile $6 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 5 \cos^2 x = 2$ și $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$. Câte soluții comune au aceste ecuații ?

a) nici una; b) o infinitate; c) două; d) toate; e) trei; f) patru.

19. (aplicații ale trigonometriei) În ce triunghi are loc relația $\frac{a+c}{b} = \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$?

a) echilateral; b) dreptunghic; c) oarecare; d) în nici un triunghi; e) isoscel;

f) obtuzunghic.

20. (geometrie în spațiu) Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$. Să se calculeze unghiul dintre dreptele AC și AB' .

a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{7\pi}{12}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $\frac{\pi}{5}$; f) $\frac{3\pi}{8}$.