1. Fie ecuaţia $(x-[x])e^x = \frac{1}{9}$, unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x. Câte soluţii are această ecuaţie în intervalul $(-5,5)$? **(9 pct.)**

   a) 5; b) 9; c) 8; d) 6; e) 4; f) 7.

   Soluţie. Intervalul din enunţ se descompune:

   $$(-5,5) = (-5,-4) \cup [-4,-3) \cup [-3,-2) \cup \ldots \cup [2,3) \cup [3,4) \cup [4,5).$$

   Observăm că $x = m = -5$ nu este soluţie a ecuaţiei, deci pentru primul interval $(-5,-4)$ problema revine la a determina dacă există soluţie în intervalul extins $[-5,-4)$. Prin urmare, vom studia deci existenţa soluţiilor în reuniunea următoarelor 10 intervale disjuncte

   $$[-5,5) = [-5,-4) \cup [-4,-3) \cup [-3,-2) \cup \ldots \cup [2,3) \cup [3,4) \cup [4,5).$$

   Se observă că pe fiecare interval de forma $[m,m+1)$, unde $m \in \mathbb{Z}$, funcţia $f(x) = (x-[x])e^x = (x-m)e^x$ este continuă (fiind produsul dintre o funcţie polinomială şi funcţia exponenţială) şi strict crescătoare (fiind produsul a două funcţii strict crescătoare pozitive). Deci fiecare posibilă soluţie $x_* \in [-5,5)$ a ecuaţiei date va aparţine unui unic interval $[m,m+1)$, cu $m \in \{-5,-4,\ldots,3,4\}$. Un asemenea interval conţine o soluţie $x_0 \in [m,m+1)$ doar dacă m satisface inegalităţile

   $$\min_{x\in[m,m+1)} f(x) \le f(x_0) = \frac{1}{9} < \sup_{x\in[m,m+1)} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le f(x_0) = \frac{1}{9} < e^{-m-1} \Leftrightarrow e^{-m-1} > \frac{1}{9},$$

   deci dacă m satisface inegalitatea $e^{m+1} < 9$.

   Observăm că valorilor posibile $m \in \{-5,-4,-3,\ldots,2,3,4\}$ le corespund valorile strict descrescătoare $\{e^4, e^3, e^2, \ldots, e^{-4}, e^{-5}\}$, că primele două situaţii nu convin ($e^4 > 9$, $e^3 > 9$) şi pentru toate celelalte opt valori ale lui $m \in \{-3,-2,\ldots,3,4\}$ inegalitatea fiind satisfăcută, intervalul $[m,m+1)$ corespunzător conţine exact o soluţie. În concluzie, ecuaţia din enunţ admite exact 8 soluţii în intervalul $(-5,5)$. (c)

   Altfel. Se rescrie ecuaţia sub forma $x-[x] = \frac{1}{9}e^{-x}$, apoi se studiază punctele de intersecţie ale graficelor celor două funcţii date de membrii egalităţii, identificând "grafic" punctele de intersecţie ("metoda grafică").

2. Fie funcţia $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$ şi punctul $M(0,-2)$. Fie

   $$A = \{x_0 \in (0,\infty) \mid \text{tangenta la graficul funcţiei } f \text{ în punctul de abscisă } x_0 \text{ trece prin } M\}.$$

   Atunci: **(9 pct.)**

   a) $A \subset (e^2,\infty)$; b) $A \subset (\sqrt{e}, e)$; c) $A \subset (0,1)$; d) $A \subset (e\sqrt{e}, e^2)$; e) $A \subset (1,\sqrt{e})$; f) $A \subset (e, e\sqrt{e})$.

   Soluţie. Punctul de abscisă x_0 aflat pe graficul funcţiei f are coordonatele $P(x_0,y_0) = (x_0, x_0^2 \ln x_0)$, iar derivata funcţiei f în acest punct este

   $$f'(x_0) = (x^2 \ln x)'|_{x=x_0} = (2x\ln x + x)|_{x=x_0} = 2x_0 \ln x_0 + x_0.$$

   Dreapta tangentă la grafic în P are deci ecuaţia

   $$D: \quad y - y_0 = f'(x_0)(x-x_0) \quad \Leftrightarrow \quad y - x_0^2 \ln x_0 = (2x_0 \ln x_0 + x_0)\cdot(x-x_0),$$

   iar condiţia $M(0,-2) \in D$ revine la:

   $$-2 - x_0^2 \ln x_0 = (2x_0 \ln x_0 + x_0)(-x_0) \quad \Leftrightarrow \quad 2 - x_0^2 = x_0^2 \ln x_0.$$

   Prin urmare, $x_0 \in (0,\infty)$ este soluţia ecuaţiei

   $$\ln x = \frac{2-x^2}{x^2},$$

   deci a ecuaţiei $\varphi(x) = 0$, unde $\varphi(x) = \ln x - \dfrac{2-x^2}{x^2}$. Pentru $x \in (0,1]$ avem $\varphi(x) \le -1 < 0$, deci intervalul $(0,1]$ nu conţine soluţii ale ecuaţiei. Pentru $x \in (1,\infty)$, φ este continuă şi are derivata $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^3}$ strict pozitivă, deci este monotonă strict crescătoare. Dar $\varphi(1) = -1 < 0$, şi $\varphi(\sqrt{e}) = \frac{1}{2} - \frac{2-e}{e} = \frac{3e-4}{2e} > 0$, deci φ fiind continuă şi monotonă pe intervalul $x \in (1,\infty) \supset (1,\sqrt{e})$, ecuaţia $\varphi(x) = 0$ admite o unică soluţie în intervalul $(1,\sqrt{e})$. În concluzie, $A \subset (1,\sqrt{e})$. (e)

3. Fie ecuaţia $x^2 - 2x - 8 = 0$, cu soluţiile reale x_1 şi x_2. Atunci expresia $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ este: **(9 pct.)**

a) 16; b) 21; c) 14; d) -15; e) 15; f) -16.

Soluţie. Calculăm direct rădăcinile complexe ale ecuaţiei,

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \in \{4, -2\},$$

deci ambele rădăcini $x_1 = 4$, $x_2 = -2$ sunt reale şi avem $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 16 \cdot (-2) + 4 \cdot (-2)^2 = -16$. (f)

Altfel. Se verifică uşor că soluţiile ecuaţiei date de gradul doi sunt reale: discriminantul acesteia este $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 \geq 0$. Se observă că expresia din enunţ se rescrie $S = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 \cdot (x_1 + x_2)$. Cele două relaţii Viete ale ecuaţiei de gradul doi din enunţ sunt $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-2}{1} = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{-8}{1} = -8, \end{cases}$ deci $S = x_1 x_2 \cdot (x_1 + x_2) = -8 \cdot 2 = -16$. (f)

4. Să se rezolve inecuaţia $2x - 1 > x + 2$. **(9 pct.)**

a) $x \in (-1, 3)$; b) $x \in (-3, -2)$; c) $x \in \varnothing$; d) $x \in (-\infty, -3)$; e) $x \in (3, \infty)$; f) $x \in (-2, -1)$.

Soluţie. Inecuaţia se rescrie $2x - 1 - (x + 2) > 0 \Leftrightarrow x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$, deci $x \in (3, \infty)$. (e)

5. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $7^{x^2 - 1} = 343$ este: **(9 pct.)**

a) $\{3; 4\}$; b) $\{-1; 1\}$; c) $\{1; 4\}$; d) $\{-2; 2\}$; e) $\{1; 3\}$; f) $\{-3; 1\}$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie $7^{x^2-1} = 343 \Leftrightarrow 7^{x^2-1} = 7^3$. Logaritmând în baza 3, obţinem $x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x \in \{-2; 2\}$. (d)

6. Să se determine numărul natural n ştiind că $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 256$. **(9 pct.)**

a) $n = 5$; b) $n = 8$; c) $n = 9$; d) $n = 7$; e) $n = 4$; f) $n = 6$.

Soluţie. Folosind binomul lui Newton, avem $(1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ deci, folosind egalitatea din enunţ, obţinem $2^n = 256 \Leftrightarrow 2^n = 2^8 \Leftrightarrow n = 8$. (b)

7. Să se determine suma pătratelor soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt[3]{5x - 2} = \frac{1}{5}(x^3 + 2)$. **(9 pct.)**

a) 14; b) 10; c) 9; d) 17; e) 4; f) 11.

Soluţie. Funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite de cei doi membri ai ecuaţiei, $\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{5x - 2} \\ g(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 2) \end{cases}$ sunt continue şi sunt strict crescătoare. Ele sunt inverse una alteia cu grafice simetrice faţă de prima bisectoare şi produc ordonate egale în punctele de pe graficele acestora aflate la intersecţia cu prima bisectoare. Deci pentru fiecare soluţie x_* avem $\sqrt[3]{5x_* - 2} = \frac{1}{5}(x_*^3 + 2) = x_*$. Se observă că a doua egalitate o implică pe prima şi produce ecuaţia algebrică de gradul trei $x^3 - 5x + 2 = 0$. Se observă că $x = 2$ este soluţie a acestei ecuaţii. Folosind schema Horner pentru $x_1 = 2$ sau prin împărţire la monomul $x - 2$, se constată că $x^3 - 5x + 2 = (x - 2)(x^2 + 2x - 1)$, deci celelalte două rădăcini satisfac ecuaţia

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} \in \{-1 \pm \sqrt{2} \subset \mathbb{R}\}.$$

Prin urmare suma pătratelor celor trei rădăcini este $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2^2 + (-1 + \sqrt{2})^2 + (-1 - \sqrt{2})^2 = 10$. (b)

Altfel. Procedând ca în prima rezolvare, rezultă că ecuaţia este echivalentă cu $x^3 - 5x + 2 = 0$, care are rădăcina reală $x_1 = 2$ iar celelalte două rădăcini $x_{2,3}$ satisfac ecuaţia de gradul doi $x^2 + 2x - 1 = 0$. Discriminantul acesteia fiind $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8 > 0$, deci $x_{2,3}$ sunt soluţii reale distincte, $x_2 \neq x_3$. Aceste rădăcini sunt diferite de $x_1 = 2$, deoarece $x_1 = 2$ nu satisface ecuaţia de gradul 2. În concluzie soluţiile x_1, x_2, x_3 ale ecuaţiei $x^3 - 5x + 2 = 0$ sunt reale şi distincte. Cele trei soluţii au suma pătratelor $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)$. Din primele două relaţii Viete, obţinem $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{0}{1} = 0 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -\frac{5}{1} = -5 \end{cases}$, deci $S = 0^2 - 2(-5) = 10$. (b)

8. Fie matricea $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{smallmatrix}\right)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinaţi valoarea lui a pentru care $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. **(9 pct.)**

a) $a = -6$; b) $a = -2$; c) $a = 4$; d) $a = 1$; e) $a = -1$; f) $a = 2$.

Soluţie. Prin calcul direct, obţinem $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2a+1 & 4 \\ 2a & 2a+1 \end{smallmatrix}\right)$. Folosind expresia lui A^2 din enunţ, rezultă egalitatea

$$\left(\begin{smallmatrix} 2a+1 & 4 \\ 2a & 2a+1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a+1 = 3 \\ 2a = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a = 1. \quad \text{(d)}$$

9. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x$. Calculaţi $f'(2)$. **(9 pct.)**

a) 10; b) -10; c) -6; d) 11; e) -11; f) 4.

Soluţie. Derivând funcţia f, obţinem $f'(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2$, deci $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 = 10$. (a)

10. Fie $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(y) = \displaystyle\int_0^y \frac{1}{x^2 - 2x + y} dx$. Calculaţi $\displaystyle\int_2^{10} f(y) dy$. **(9 pct.)**

a) 3π; b) 2π; c) $\frac{5\pi}{3}$; d) π; e) $\frac{\pi}{2}$; f) $\frac{3\pi}{2}$.

Soluţie. Din enunţ rezultă $y > 1$ şi (folosind eventual substituţia $x - 1 = u$ şi notând $\sqrt{y-1} = a$) avem

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_0^y \frac{1}{x^2 - 2x + y} dx = \int_0^y \frac{1}{(x-1)^2 + (\sqrt{y-1})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{y-1}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{y-1}} \Big|_0^y \\ &= \frac{1}{\sqrt{y-1}} \operatorname{arctg} \frac{y-1}{\sqrt{y-1}} - \frac{1}{\sqrt{y-1}} \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{y-1}} = \frac{1}{\sqrt{y-1}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{y-1} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{y-1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{y-1}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{y-1} + \operatorname{arcctg} \sqrt{y-1} \right) = \frac{1}{\sqrt{y-1}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(y-1)^{-1/2}, \end{aligned}$$

unde s-a folosit relaţia $\operatorname{arctg} t + \operatorname{arcctg} t = \frac{\pi}{2}$, $\forall t > 0$ (uşor de verificat, deoarece funcţia din membrul stâng are derivata identic nulă, deci este constantă şi este egală spre exemplu cu valoarea sa $\frac{\pi}{2}$ în $t = 1$). Atunci (folosind eventual substituţia $y - 1 = v$), obţinem integrala dorită:

$$\int_2^{10} f(y) dy = \frac{\pi}{2} \int_2^{10} (y-1)^{-1/2} dy = \frac{\pi}{2} \cdot 2(y-1)^{1/2} \Big|_2^{10} = \pi \cdot \sqrt{y-1} \Big|_2^{10} = \pi \cdot (3-1) = 2\pi. \quad \text{(b)}$$