

1. Să se determine mulțimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $\ln(1+2x) - x^2 = a$ să aibă o singură soluție strict negativă. (6 pct.)

a) $a \in (-e, e)$; b) $a \in (0, \ln 2)$; c) $a \in (-1, \ln 2)$; d) $a \in (-\infty, 0)$; e) $a \in (0, \ln 2 - \frac{1}{4})$; f) $a \in (\frac{1}{2}, \ln 3)$.

Soluție. Din condițiile de existență pentru logaritmul, obținem $1+2x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$. Studiem funcția $f(x) = \ln(1+2x) - x^2$, $f: (-\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Avem $f'(x) = \frac{2}{1+2x} - 2x = \frac{-2(2x^2+x-1)}{2x+1}$ și se observă că $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \right\} \Leftrightarrow x \in \left\{ -1, \frac{1}{2} \right\}$, convenind doar soluția $\frac{1}{2} \in (-\frac{1}{2}, \infty)$. De asemenea, se observă că $f(\frac{1}{2}) = \ln 2 - \frac{1}{4}$, $f(0) = 0$ și

$$\lim_{x \searrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \searrow -\frac{1}{2}} \ln(1+2x) - x^2 = -\infty - \frac{1}{4} = -\infty.$$

Pe de altă parte,

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{\ln(1+2x)}{x^2} - 1 \right)$$

și folosind pentru fracție regula lui l'Hospital, cazul $\frac{\infty}{\infty}$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(1+2x)}{x^2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{2/(1+2x)}{2x} - 1 \right) = -1,$$

rezultă $L = \infty \cdot (-1) = -\infty$. Pe baza acestor rezultate, putem construi tabelul de variație al funcției f ,

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	∞
$f(x)$	$-\infty$	0	$\ln 2 - \frac{1}{4}$	$-\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$

Se observă că $\ln 2 - \frac{1}{4} > 0$ (inegalitatea revine, în urma exponențierii la $16 > e$, adevărat), deci punctul de maxim al funcției f se află deasupra axei Ox . Folosind graficul funcției f , examinăm ecuația $f(x) = a$. Distingem următoarele trei cazuri: (i) pentru $a > \ln 2 - \frac{1}{4}$, dreapta $y = a$ nu intersectează graficul funcției f deci a nu întrunește condiția impusă de definiția mulțimii M ; (ii) pentru $a = \ln 2 - \frac{1}{4}$, dreapta intersectează graficul într-un punct dublu de abscisă nenegativă $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, deci $a \notin M$; (iii) pentru $a \in (0, \ln 2 - \frac{1}{4})$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise strict pozitive $x_{1,2} > 0$, deci $a \notin M$; (iv) pentru $a = 0$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise $x_1 = 0$ respectiv $x_2 > 0$, deci $a \notin M$; (v) pentru $a < 0$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise $x_1 \in (-\frac{1}{2}, 0)$, respectiv $x_2 > 0$, deci $a \in M$, singurul caz favorabil. În concluzie, $M = (-\infty, 0)$. @

2. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ este: (6 pct.)

a) -1 ; b) 0 ; c) 5 ; d) 1 ; e) -2 ; f) 2 .

Soluție. Scăzând prima coloană din celelalte două și apoi dezvoltând determinantul după ultima linie, obținem

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0. \text{ @}$$

Altfel. Se observă că dublul ultimei coloane este suma primelor două, deci determinantul este nul.

Altfel. Prima linie este diferența dintre ultima și penultima linie, deci determinantul este nul.

Altfel. Folosind regula lui Sarrus, obținem $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 0 + (-1)) - (1 + 0 + 0) = 0$.

3. Pentru $r > 0$, fie mulțimea $M = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1 \text{ și } |z - 3i| = r\}$. Fie $A = \{r > 0 ; M \text{ are un singur element}\}$. Să se determine suma S a elementelor mulțimii A . **(6 pct.)**
 a) $S = 6$; b) $S = 5$; c) $S = 4$; d) $S = 2$; e) $S = 8$; f) $S = 12$.

Soluție. Se observă că pentru $r \leq 0$, mulțimea nu conține elemente ($M = \emptyset$). Pentru $r > 0$, notând $z = x + iy$, cele două condiții din definiția mulțimii M se rescriu:

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z - 3i| = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - 6y + 9 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ -6y + 9 = r^2 - 1 \end{cases},$$

de unde, eliminând y , obținem $x^2 + \left(\frac{10-r^2}{6}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = E(r)$, unde am notat $E(r) = 1 - \left(\frac{10-r^2}{6}\right)^2$. Dar această ecuație are o singură soluție reală (dublă) doar dacă $E(r) = 0$, ceea ce revine la egalitatea $\frac{10-r^2}{6} = \pm 1 \Leftrightarrow r^2 = 10 \mp 6 \Leftrightarrow r^2 \in \{4, 16\}$, și deoarece $r > 0$, obținem corespunzător valorile $r \in \{2, 4\}$, deci $S = 2 + 4 = 6$, **(a)**

Altfel. Folosind reprezentarea grafică a celor două condiții din definiția mulțimii $M \subset \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, pentru $z = x + iy \in M$ obținem relațiile

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z - 3i| = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \\ \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = r, \end{cases}$$

deci căutăm punctele din planul complex care aparțin simultan cercurilor $\Gamma_1 = \mathcal{C}_{(C_1(0,0), r_1=1)}$ și $\Gamma_2 = \mathcal{C}_{(C_2(0,3), r_2=r)}$. Dar intersecția $M = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ constă dintr-un singur punct doar dacă cele două cercuri sunt tangente. În aceste cazuri, avem fie $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2 \Leftrightarrow 3 = 1 + r \Leftrightarrow r = 2$, fie $d(C_1, C_2) = |r_2 - r_1| \Leftrightarrow 3 = |r - 1|$. Pentru $r \geq 1$, rezultă soluția $r = 4 \geq 1$, iar pentru $r < 1$, rezultă $3 = 1 - r \Leftrightarrow r = -2$, subcaz imposibil. În concluzie, suma celor două valori valide obținute pentru r este $S = 2 + 4 = 6$.

4. Știind că numerele $x, x + 1, x + 3$ sunt în progresie geometrică (în această ordine), atunci: **(6 pct.)**
 a) $x = 3$; b) $x = -1$; c) $x = 1$; d) $x = -2$; e) $x = 4$; f) $x = 2$.

Soluție. Pătratul celui de-al doilea număr este produsul celorlalte două, deci $(x + 1)^2 = x(x + 3) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + 3x \Leftrightarrow x = 1$. **(c)**

5. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Dacă $X = A + 2B$, să se calculeze determinantul matricei X . **(6 pct.)**
 a) -10 ; b) 14 ; c) -14 ; d) 10 ; e) 20 ; f) -20 .

Soluție. Prin înlocuire directă, obținem

$$X = A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

iar $\det X = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - (2 \cdot 4) = -12 - 8 = -20$. **(d)**

6. Fie P un polinom cu coeficienți reali astfel încât $P(1) + P(2) + \dots + P(n) = n^5$, pentru orice număr natural $n \geq 1$. Să se calculeze $P\left(\frac{3}{2}\right)$. **(6 pct.)**
 a) $\frac{225}{49}$; b) $\frac{121}{16}$; c) $\frac{114}{31}$; d) $\frac{47}{15}$; e) $\frac{91}{17}$; f) $\frac{169}{25}$.

Soluție. Folosim egalitatea din enunț, $P(1) + \dots + P(n) = n^5, \forall n \in \mathbb{N}$, deci dând valori lui $n \in \mathbb{N}$ și apoi scăzând relațiile succesive două câte două, obținem

$$\begin{cases} P(1) = 1^5 \\ P(1) + P(2) = 2^5 \\ \vdots \\ P(1) + \dots + P(n) = n^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 1 = 1^5 - 0^5 \\ P(2) = 2^5 - 1 \\ \vdots \\ P(n) = n^5 - (n - 1)^5, \end{cases}$$

deci $P(n) = n^5 - (n - 1)^5, \forall n \in \mathbb{N}$. Arătăm că $P(x) = x^5 - (x - 1)^5, \forall x \in \mathbb{R}$. Notând $Q(x) = P(x) - [x^5 - (x - 1)^5]$, observăm că polinomul Q are o infinitate de rădăcini reale distincte $n \in \mathbb{N}$, deci este identic nul. Prin urmare $Q \equiv 0$, iar $P(x) = x^5 - (x - 1)^5, \forall x \in \mathbb{R}$. Prin înlocuire, obținem $P\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3^5 - 1}{2^5} = \frac{121}{16}$. **(b)**

7. Dacă a , b și c sunt determinate astfel încât să aibă loc egalitatea $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \int_0^x (a + b \cos t + c \cos 2t) dt = \frac{1}{5}$, să se calculeze $S = |a| + |b| + |c|$. (6 pct.)
 a) $S = 16$; b) $S = 18$; c) $S = 14$; d) $S = 24$; e) $S = 20$; f) $S = 22$.

Soluție. Prin integrare directă, obținem

$$I(x) = \int_0^x (a + b \cos t + c \cos 2t) dt = \left(at + b \sin t + c \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^x = ax + b \sin x + c \frac{\sin 2x}{2}.$$

Se observă că $\lim_{x \rightarrow 0} I(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow 0} x^5 = 0$, deci limita din enunț se poate calcula cu regula l'Hospital (cazul $\frac{0}{0}$),

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} I(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + b \sin x + c \cdot (\sin 2x)/2}{x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + b \cos x + c \cdot \cos 2x}{5x^4}.$$

Dacă limita $a + b + c$ a expresiei de la numărător este nenulă, atunci $L = \text{sign}(a + b + c) \cdot \infty \neq 0$, ceea ce intră în contradicție cu cerințele problemei. Deci $a + b + c = 0$ și înlocuind $a = -b - c$ în expresia lui L , obținem:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-b - c) + b \cos x + c \cdot \cos 2x}{5x^4} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b(\cos x - 1) + c(\cos 2x - 1)}{x^4},$$

căreia i se poate aplica succesiv regula l'Hospital (cazul $\frac{0}{0}$); obținem

$$L = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-b \sin x - 2c \sin 2x}{4x^3} = \frac{1}{20} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-b \cos x - 4c \cos 2x}{3x^2}.$$

Dacă limita $-b - 4c$ a expresiei de la numărător este nenulă, atunci $L = \text{sign}(-b - 4c) \cdot \infty \neq 0$, ceea ce intră în contradicție cu cerințele problemei. Deci $-b - 4c = 0$ și înlocuind $b = -4c$ în expresia lui L , obținem:

$$L = \frac{1}{60} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4c \cos x - 4c \cos 2x}{x^2} = \frac{c}{15} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2},$$

limită căreia i se poate aplica succesiv regula l'Hospital (cazul $\frac{0}{0}$); obținem

$$L = \frac{c}{15} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 2 \sin 2x}{2x} = \frac{c}{30} \lim_{x \rightarrow 0} (-\cos x + 4 \cos 2x) = \frac{c}{10},$$

Prin urmare egalitatea din enunț $L = \frac{1}{5}$ se rescrie $\frac{c}{10} = \frac{1}{5}$, deci $c = 2$. Din relațiile obținute pe parcurs, obținem $b = -4c = -8$ și $a = -b - c = 6$, deci $|a| + |b| + |c| = 6 + 8 + 2 = 16$. (a)

8. Produsul soluțiilor ecuației $\sqrt{1-x} + \sqrt{x} = 1$ este: (6 pct.)
 a) 0; b) 2; c) -1; d) 1; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{2}$.

Soluție. Condițiile de existență pentru cei doi radicali sunt $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, 1]$. Ridicând ecuația la pătrat, obținem

$$(1-x) + x + 2\sqrt{x(1-x)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x)} = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\},$$

iar $\{0, 1\} \subset [0, 1]$, deci ambele soluții convin. Prin urmare produsul soluțiilor este $0 \cdot 1 = 0$. (a)

9. Fie ecuația $x^3 + x^2 - 2x = 0$. Suma S a soluțiilor reale este: (6 pct.)
 a) $S = 0$; b) $S = 1$; c) $S = -2$; d) $S = 2$; e) $S = -1$; f) $S = 3$.

Soluție. Ecuația se rescrie $x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$, iar $x^2 + x - 2 = 0$ are soluțiile $x \in \left\{ \frac{-1 \pm 3}{2} \right\} = \{-2, 1\}$, deci cele trei soluții ale ecuației date sunt $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 1$, iar suma lor este $S = 0 + (-2) + 1 = -1$. (e)

10. Soluția ecuației $4^{x-1} = 16$ este: (6 pct.)

a) $x = -2$; b) $x = 4$; c) $x = 5$; d) $x = 2$; e) $x = 0$; f) $x = 3$.

Soluție. Rescriem ecuația și logarităm în baza 4 ecuația. Obținem $4^{x-1} = 4^2 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$. (f)

11. Să se rezolve ecuația $\log_5(x-1) = 1$. (6 pct.)

a) $x = 11$; b) $x = 0$; c) $x = 4$; d) $x = 1$; e) $x = 6$; f) $x = 3$.

Soluție. Condiția de existență a logaritmului este $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (1, \infty)$. Aplicând ecuației funcția exponențială de bază 5, obținem $x - 1 = 5^1 \Leftrightarrow x = 6$. (e)

12. Pe mulțimea $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - 2(x + y) + c$, unde c este un număr real. Știind că legea de compoziție ” * ” definește pe A o structură de grup comutativ, să se determine simetricul elementului $x = 4$. (6 pct.)

a) $\frac{15}{13}$; b) $\frac{11}{6}$; c) $\frac{12}{11}$; d) $\frac{12}{5}$; e) $\frac{13}{12}$; f) $\frac{11}{7}$.

Soluție. Deoarece $(A, *)$ este grup, rezultă că admite element neutru. Deci $\exists e \in A$ a.i. $x * e = e * x = x$, $\forall x \in A$. Dar $x * e = e * x = 2ex - 2(x + e) + c$, deci

$$x * e = e * x = x \Leftrightarrow 2ex - 2(x + e) + c = x \Leftrightarrow x(2e - 3) + (c - 2e) = 0,$$

care are loc pentru orice $x \in A$, deci polinomul obținut este identic nul. Anularea coeficienților săi revine

la egalitățile $\begin{cases} 2e - 3 = 0 \\ c - 2e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 3/2 \\ c = 3. \end{cases}$ Atunci, notând cu $x' \in A$ simetricul lui $x = 4$, au loc relațiile

$$x * x' = x' * x = e \Leftrightarrow 2xx' - 2(x + x') + 3 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 8x' - 2(4 + x') = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 6x' = \frac{13}{2} \Leftrightarrow x' = \frac{13}{12}. \text{ (e)}$$

Altfel. Asociativitatea grupului $(A, *)$ revine la a afirma că pentru orice $x, y, z \in A$, are loc egalitatea

$$\begin{aligned} (x * y) * z - x * (y * z) &\Leftrightarrow [2xy - 2(x + y) + c] * z = x * [2yz - 2(y + z) + c] \\ &\Leftrightarrow 2(2xy - 2x - 2y + c)z - 2(2xy - 2x - 2y + c + z) + c \\ &= 2x(2yz - 2y - 2z + c) - 2(x + 2yz - 2y - 2z + c) + c \\ &\Leftrightarrow x(6 - 2c) + z(2c - 6) = 0. \end{aligned}$$

Dar egalitatea are loc pentru orice $x, z \in A$, deci ambele paranteze se anulează, ceea ce revine la $2c - 6 = 0 \Leftrightarrow c = 3$. Pe de altă parte, notând cu $e \in A$ elementul neutru al grupului $(A, *)$, acesta satisface pentru orice $x \in A$ egalitățile $x * e = e * x = x \Leftrightarrow 2ex - 2(e + x) + 3 = x \Leftrightarrow x(2e - 3) + (3 - 2e) = 0$, iar $x \in A$ fiind arbitrar, rezultă anularea coeficienților polinomului în x obținut, deci $e = \frac{3}{2} \in A$. Pentru aflarea simetricului elementului $x = 4 \in A$, se continuă ca în rezolvarea de mai sus.

13. Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$. (6 pct.)

a) $x = 2, y = 2$; b) $x = -1, y = 5$; c) $x = -2, y = -3$; d) $x = 4, y = 0$; e) $x = 1, y = 3$; f) $x = 0, y = 4$.

Soluție. Aplicăm metoda reducerii: adunând cele două ecuații, obținem $3x = 3 \Rightarrow x = 1$, deci din prima ecuație rezultă $y = 4 - x = 3$, iar sistemul are soluția $(x, y) = (1, 3)$. (e)

Altfel. Aplicăm metoda substituției. Din prima ecuație obținem $y = 4 - x$. Înlocuind în a doua ecuație, rezultă $2x - (4 - x) = -1 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$, deci $y = 4 - x = 3$; în final avem soluția $(x, y) = (1, 3)$.

Altfel. Determinantul sistemului liniar este $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, deci sistemul este Cramer, cu soluția unică dată de

$$\begin{cases} x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-3}{-3} = 1 \\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-9}{-3} = 3, \end{cases}$$

deci $x = 1, y = 3$.

14. Fie polinomul $f = X^2 + 2X + 3$. Să se calculeze $S = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$, unde x_1, x_2, x_3 sunt soluțiile complexe ale ecuației $x^3 - 1 = 0$. (6 pct.)

a) $S = i$; b) $S = 0$; c) $S = -1$; d) $S = 9$; e) $S = 6$; f) $S = 1$.

Soluție. Ecuația $x^3 - 1 = 0$ se rescrie $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ și are soluțiile complexe $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pe de altă parte $S = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1 + x_2 + x_3) + 9$. Prin înlocuire directă, obținem $S = 0 + 2 \cdot 0 + 9 = 9$. **Ⓐ**

Altfel. Din relațiile Viete pentru ecuația $x^3 - 1 = 0$, rezultă $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 \end{cases}$, de unde rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$. Atunci $S = 0 + 2 \cdot 0 + 9 = 9$.

15. Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e^x$, să se calculeze $f'(0)$. **(6 pct.)**

a) -1 ; b) 3 ; c) 1 ; d) 0 ; e) 2 ; f) -2 .

Soluție. Prin derivare termen cu termen, obținem $f'(x) = (x - e^x)' = 1 - e^x$, deci $f'(0) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$, **Ⓐ**