

1. Fie vectorii  $\bar{u}$  și  $\bar{v}$ , unde  $|\bar{u}| = 1$ ,  $|\bar{v}| = 2$  și  $\widehat{(\bar{u}, \bar{v})} = \frac{\pi}{3}$ . Atunci produsul scalar  $(2\bar{u} + \bar{v}) \cdot (2\bar{v} - \bar{u})$  este: **(6 pct.)**

a) 9; b) 7; c) 8; d) 11; e) 10; f) 6.

**Soluție.** Folosind bilinearitatea și comutativitatea produsului scalar, precum și egalitățile

$$\begin{cases} \bar{u} \cdot \bar{u} = |\bar{u}|^2 = 1^2 = 1, & \bar{v} \cdot \bar{v} = |\bar{v}|^2 = 2^2 = 4, \\ \bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos \widehat{(\bar{u}, \bar{v})} = 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \end{cases}$$

obținem

$$\begin{aligned} (2\bar{u} + \bar{v}) \cdot (2\bar{v} - \bar{u}) &= -2\bar{u} \cdot \bar{u} + (4 - 1)\bar{u} \cdot \bar{v} + 2\bar{v} \cdot \bar{v} \\ &= -2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 9. \quad \text{a)} \end{aligned}$$

2. Dacă  $\sin(\frac{\pi}{6} - \hat{B}) = 0$ , atunci  $\sin(2\hat{B} - \frac{\pi}{4})$  este egal cu: **(6 pct.)**

a)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ; b)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ; c)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4}$ ; d)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{4}$ ; e)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ ; f)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ .

**Soluție.** Rezolvăm ecuația din enunț, și obținem succesiv:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - \hat{B}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - \hat{B} \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow \hat{B} \in \left\{k\pi + \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \Rightarrow 2\hat{B} \in \left\{2k\pi + \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\},$$

deci  $\sin(2\hat{B}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  și  $\cos(2\hat{B}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ .

Pe de altă parte, folosind formula  $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$ , expresia căutată se simplifică:

$$\begin{aligned} \sin\left(2\hat{B} - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin(2\hat{B}) \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos(2\hat{B}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(2\hat{B}) - \cos(2\hat{B})) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \quad \text{f)} \end{aligned}$$

3. În triunghiul  $ABC$  se dau  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $AB = 3$  și  $AC = 4$ . Atunci aria triunghiului  $ABC$  este: **(6 pct.)**  
a) 2; b) 12; c) 3; d) 6; e) 9; f) 1.

**Soluție.** Prin calcul direct, obținem aria cerută:  $\frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}}{2} = 3$ . **c)**

4. Valoarea expresiei  $\sin \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$  este: **(6 pct.)**

a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; c) 1; d) -1; e) 2; f) 0.

**Soluție.** Înlocuind cei doi termeni, obținem:  $\sin \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2$ . **e)**

5. Aflați valoarea lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care punctul  $A(1, m)$  aparține dreptei de ecuație  $2x + y = 1$ . **(6 pct.)**

a) -1; b) 2; c) 3; d) 1; e) 0; f) -2.

**Soluție.** Punctul se află pe dreaptă d.n.d. coordonatele sale satisfac ecuația dreptei. Înlocuind  $x = 1$  și  $y = m$  în ecuația dată, rezultă  $2 + m = 1$ , deci  $m = -1$ . **a)**

6. Se dau vectorii  $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ ,  $\bar{v} = 6\bar{i} - 4\bar{j}$ ,  $\bar{w} = 5\bar{i} - \bar{j}$ . Să se calculeze vectorul  $\bar{u} - \bar{v} + \bar{w}$ . **(6 pct.)**

a)  $2\bar{i} + 6\bar{j}$ ; b)  $\bar{i} + \bar{j}$ ; c)  $2\bar{i} + 3\bar{j}$ ; d)  $2\bar{i} - 3\bar{j}$ ; e)  $\bar{i} - \bar{j}$ ; f)  $\bar{i} + 6\bar{j}$ .

**Soluție.** Grupând coeficienții vectorilor  $\bar{i}$  și  $\bar{j}$ , obținem:

$$\bar{u} - \bar{v} + \bar{w} = (2\bar{i} + 3\bar{j}) - (6\bar{i} - 4\bar{j}) + (5\bar{i} - \bar{j}) = (2 - 6 + 5)\bar{i} + (3 + 4 - 1)\bar{j} = \bar{i} + 6\bar{j}. \quad \text{f)}$$

7. În triunghiul  $ABC$  are loc relația:  $\cos^2 \hat{A} - \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} = 1$ . Atunci: **(6 pct.)**

a)  $\hat{B} = 30^\circ$ ; b)  $\hat{B} = 135^\circ$ ; c)  $\hat{B} = 45^\circ$ ; d)  $\hat{B} = 60^\circ$ ; e)  $\hat{B} = 90^\circ$ ; f)  $\hat{B} = 120^\circ$ .

**Soluție. Metoda 1.** Folosind formula  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ , obținem

$$\cos^2 \hat{A} - \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \hat{B} - \sin^2 \hat{A} = \sin^2 \hat{C}.$$

Aplicând apoi teorema extinsă a sinusului ( $a = 2R \sin \hat{A}$  și relațiile similare), după simplificare cu  $4R^2$  ecuația devine

$$b^2 - a^2 = c^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 + c^2,$$

deci triunghiul  $ABC$  este dreptunghic cu unghiul drept  $\hat{B}$ , deci  $\hat{B} = 90^\circ$ .

**Metoda 2.** Folosind formulele  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  și  $\cos^2 \beta = \frac{1 + \cos 2\beta}{2}$ , ecuația se rescrie:

$$\cos^2 \hat{A} - \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} = 1 \Leftrightarrow \frac{\cos 2\hat{A} - \cos 2\hat{B}}{2} = \sin^2 \hat{C}.$$

Folosind apoi relația  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ , obținem

$$-\sin(\hat{A} + \hat{B}) \sin(\hat{A} - \hat{B}) = \sin^2 \hat{C}.$$

Dar  $\sin(\hat{A} + \hat{B}) = \sin(\pi - \hat{C}) = \sin \hat{C}$ , deci ecuația devine

$$-\sin \hat{C} \sin(\hat{A} - \hat{B}) = \sin^2 \hat{C} \Leftrightarrow \sin \hat{C} (\sin \hat{C} + \sin(\hat{A} - \hat{B})) = 0.$$

Folosind condiția  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$  și relația  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ , rezultă

$$\begin{aligned} \sin \hat{C} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\hat{C} + \hat{A} - \hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\hat{C} + \hat{B} - \hat{A}}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \hat{C} \cdot \sin \frac{\pi - 2\hat{B}}{2} \cdot \cos \frac{\pi - 2\hat{A}}{2} &= 0 \Leftrightarrow \sin \hat{C} \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin \hat{A} = 0. \end{aligned}$$

Dar  $\sin \hat{C} = 0$  și  $\sin \hat{A} = 0$  nu au soluții (deoarece  $\hat{A}, \hat{C} \in (0, \pi)$  implică  $\sin \hat{C} > 0$  și  $\sin \hat{A} > 0$ ), deci rămâne doar cazul  $\cos \hat{B} = 0$ , care conduce la soluția  $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$ .  $\textcircled{e}$

8. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului  $AB$ , unde  $A(-3, 4)$  și  $B(7, -2)$ . **(6 pct.)**

a)  $(7, -2)$ ; b)  $(-3, 4)$ ; c)  $(-2, -1)$ ; d)  $(1, 2)$ ; e)  $(2, 1)$ ; f)  $(0, 0)$ .

**Soluție.** Coordonatele mijlocului segmentului  $AB$  sunt  $(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}) = (\frac{-3+7}{2}, \frac{4-2}{2}) = (2, 1)$ .  $\textcircled{e}$

9. Știind că  $\sin x = \frac{1}{2}$ , să se calculeze  $\cos^2 x$ . **(6 pct.)**

a) 1; b)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; c)  $\frac{3}{4}$ ; d)  $\frac{1}{3}$ ; e)  $\frac{1}{2}$ ; f) 0.

**Soluție.** Aplicăm formula trigonometrică fundamentală  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ; obținem  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .  $\textcircled{c}$

10. Un pătrat are aria numeric egală cu 9. Atunci lungimea diagonalei pătratului este: **(6 pct.)**

a)  $\sqrt{2}$ ; b) 3; c) 4; d)  $2\sqrt{2}$ ; e) 2; f)  $3\sqrt{2}$ .

**Soluție.** Latura este  $\sqrt{9} = 3$ , iar diagonala este latura înmulțită cu  $\sqrt{2}$ , deci lungimea diagonalei este  $3\sqrt{2}$ .  $\textcircled{f}$

11. Aflați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului  $ABC$  ale cărui vârfuri sunt  $A(0, 0)$ ,  $B(2, 1)$ ,  $C(1, 2)$ . **(6 pct.)**

a)  $(1, 1)$ ; b)  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ; c)  $(3, 2)$ ; d)  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ ; e)  $(2, 3)$ ; f)  $(\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$ .

**Soluție. Metoda 1.** Punctul căutat se află la intersecția mediatoarelor triunghiului  $ABC$ . Aflăm ecuațiile mediatoarelor laturilor  $BC$  și  $AB$ .

(i) Panta laturii  $BC$  este  $m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-1}{1-2} = -1$ , iar mijlocul  $M$  al laturii  $BC$  are coordonatele  $(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ . Mediatoarea laturii  $BC$  are panta  $m' = -\frac{1}{m} = 1$ , deci ecuația acesteia este:

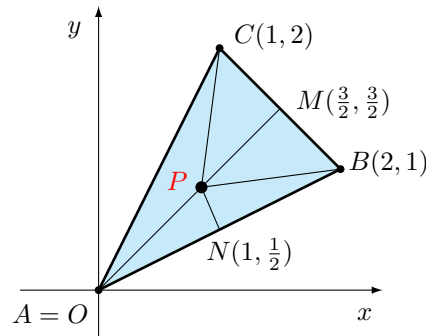
$$y - y_M = m'(x - x_M) \Leftrightarrow y - \frac{3}{2} = 1 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = x.$$

(ii) Analog, panta laturii  $AB$  este  $n = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$ , iar mijlocul  $N$  al laturii  $AB$  are coordonatele  $(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}) = (1, \frac{1}{2})$ . Mediatoarea laturii  $AB$  are panta  $n' = -\frac{1}{n} = -2$ , deci ecuația acesteia este:

$$y - y_N = n'(x - x_N) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = (-2) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{5}{2} - x.$$

Atunci intrersecția  $P$  a celor două mediatoare se obține rezolvând sistemul liniar dat de cele două ecuații ale acestora,

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{5}{2} - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/6 \\ y = 5/6. \end{cases}$$



**Metoda 2.** Se verifică ușor că  $AB = AC = 5$ , deci triunghiul  $ABC$  este isoscel, iar mediatoarea bazei  $BC$  (fiind și înălțime în triunghiul isoscel  $ABC$ ) trece atât prin mijlocul  $M$  al bazei  $BC$ , de coordonate  $(x_M, y_M) = (\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ , cât și prin punctul  $A$ . Deci ecuația mediatoarei  $AM$  este  $y - y_A = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}(x - x_A) \Leftrightarrow y = x$ . Deci punctul căutat  $P \in AM$  are coordonatele egale, fiind de forma  $P(a, a)$ . Punctul  $P$  aflându-se și pe mediatoarea segmentului  $AB$ , este egal depărtat de capetele acestui segment, deci  $PA = PB$ , egalitate care în coordonate se rescrie

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} &= \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} \\ \Leftrightarrow (a - 0)^2 + (a - 0)^2 &= (a - 2)^2 + (a - 1)^2 \Leftrightarrow -6a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{6}, \end{aligned}$$

deci punctul căutat este  $P(\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$ .

**Metoda 3.** Căutăm punctul  $P(a, b)$  aflat la intersecția mediatoarelor triunghiului  $ABC$ , deci egal depărtat de vârfurile acestui triunghi. Relațiile  $PA = PB$  și  $PA = PC$  conduc la sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} \\ \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 0)^2 + (b - 0)^2 = (a - 2)^2 + (b - 1)^2 \\ (a - 0)^2 + (b - 0)^2 = (a - 1)^2 + (b - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 5 \\ 2a + 4b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5/6 \\ b = 5/6 \end{cases} \Rightarrow P(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}). \quad \textcircled{f}$$

12. Aflați valoarea parametrului  $m \in \mathbb{R}$  pentru care vectorii  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$  și  $\vec{v} = \vec{i} + m\vec{j}$  sunt perpendiculari. **(6 pct.)**

a) 1; b) 2; c) -2; d) -1; e) 0; f) 3.

**Soluție.** Perpendicularitatea celor doi vectori revine la anularea produsului lor scalar, deci, folosind bilinearitatea produsului scalar și relațiile  $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ ,  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ , rezultă

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (2\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} + m\vec{j}) = 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -2. \quad \textcircled{c}$$

13. Aria cercului de diametru 2 este: **(6 pct.)**

a)  $3\pi$ ; b)  $6\pi$ ; c)  $\pi$ ; d)  $2\pi$ ; e)  $4\pi$ ; f)  $8\pi$ .

**Soluție.** Raza cercului este jumătate din diametru, deci are lungimea  $r = 2/2 = 1$ . Atunci aria cercului este  $\pi r^2 = \pi$ .  $\textcircled{c}$

14. Soluția ecuației  $2 \cos x = 1$ , unde  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , este: **(6 pct.)**

a)  $\frac{\pi}{6}$ ; b)  $\frac{\pi}{3}$ ; c)  $\frac{2\pi}{3}$ ; d) 0; e)  $\frac{\pi}{4}$ ; f)  $\frac{\pi}{2}$ .

**Soluție.** Ecuația se rescrie  $\cos x = \frac{1}{2}$ , deci unghiul fiind în cadranul I, avem  $x = \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ . **(b)**

15. Ecuația dreptei care trece prin punctele  $M(1, 2)$  și  $N(2, 5)$  este: **(6 pct.)**

a)  $y = 3$ ; b)  $2x + y = 2$ ; c)  $x = 0$ ; d)  $x + y = 1$ ; e)  $-x + 2y = 1$ ; f)  $3x - y = 1$ .

**Soluție.** Ecuația dreptei este  $\frac{x-x_M}{x_N-x_M} = \frac{y-y_M}{y_N-y_M} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{5-2} \Leftrightarrow 3x - y = 1$ . **(f)**