

1. Să se rezolve inecuația  $3x - 1 < 2x + 2$ . (6 pct.)

a) (1, 4); b) (-1, 1); c) (2,  $\infty$ ); d) (5, 11); e) (10,  $\infty$ ); f)  $(-\infty, 3)$ .

**Soluție.** Inecuația se rescrie:  $3x - 1 < 2x + 2 \Leftrightarrow x < 3$ , deci  $x \in (-\infty, 3)$ . (f)

2. Să se rezolve ecuația  $\log_2(x + 1) = 3$ . (6 pct.)

a)  $x = 4$ ; b)  $x = 2$ ; c)  $x = 1$ ; d)  $x = 5$ ; e)  $x = 6$ ; f)  $x = 7$ .

**Soluție.** Condiția de existență a logaritmului este  $x + 1 > 0$ , deci  $x \in (-1, \infty)$ . Obținem succesiv:  $\log_2(x + 1) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x + 1 \Rightarrow x = 7 \in (-1, \infty)$ . (f)

3. Suma soluțiilor reale ale ecuației  $\sqrt{2x + 1} = x - 1$  este: (6 pct.)

a) 4; b) 0; c) 1; d) 2; e) 3; f) 5.

**Soluție.** Condiția de existență a radicalului conduce la  $2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ . În plus, pozitivitatea radicalului conduce la  $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ , deci în final  $x \in [1, \infty)$ . Ridicând la pătrat ecuația din enunț, rezultă  $2x + 1 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 4\}$ . Dar singura soluție care satisface condiția  $x \in [1, \infty)$  este soluția  $x = 4$ , deci suma soluțiilor este 4. (a)

4. Mulțimea soluțiilor ecuației  $x^2 + 4x + 3 = 0$  este: (6 pct.)

a)  $\{2, 4\}$ ; b)  $\{-2, 1\}$ ; c)  $\{-3, -1\}$ ; d)  $\{-4, 0\}$ ; e)  $\{0, 1\}$ ; f)  $\{-2, 3\}$ .

**Soluție.** Soluțiile ecuației sunt  $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$ , deci  $x \in \{-3, -1\}$ . (c)

5. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + 2x$ . Să se calculeze  $f'(1)$ . (6 pct.)

a) 3; b) -1; c) 4; d) 6; e) 7; f) 5.

**Soluție.** Derivând funcția  $f$ , obținem  $f'(x) = 3x^2 + 2$ , deci  $f'(1) = 3 + 2 = 5$ . (f)

6. Să se calculeze determinantul  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ . (6 pct.)

a) 4; b) 2; c) -11; d) -3; e) -2; f) 9.

**Soluție. Metoda 1.** Scăzând dublul liniei a treia din prima linie și apoi dezvoltând după prima coloană, obținem:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 10 = -2.$$

**Metoda 2.** Dezvoltăm determinantul folosind regula lui Sarrus; rezultă  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (12 + 0 + 0) - (2 + 0 + 12) = -2$ . (e)

7. Să se calculeze suma soluțiilor reale ale ecuației  $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$ . (6 pct.)

a) -3; b) -1; c) 3; d) 4; e) 2; f) -2.

**Soluție. Metoda 1.** Ecuația se rescrie:  $x^3 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 3) = 0$ , deci admite soluția  $x_1 = 0$ , iar rădăcinile polinomului din paranteză sunt  $x_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \in \{-3, 1\}$ . Atunci  $x_1 + x_2 + x_3 = 0 - 3 + 1 = -2$ . **Metoda 2.** Din prima relație Viete, obținem  $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{2}{1} = -2$ . **Metoda 3.** Polinomul ecuației nu are termen liber, deci admite rădăcina  $x_1 = 0$ . Același polinom are suma coeficienților nulă, deci admite rădăcina  $x_2 = 1$ . Deci polinomul dat se divide prin  $x(x - 1) = x^2 - x$ . După efectuarea împărțirii (sau aplicând repetat schema lui Horner), obținem câtul  $x + 3$ , deci polinomul admite și rădăcina  $x_3 = -3$ . Deci  $x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 1 + (-3) = -2$ . (f)

8. Să se rezolve sistemul  $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ . (6 pct.)

a)  $x = 4, y = 1$ ; b)  $x = 1, y = 4$ ; c)  $x = 2, y = 4$ ; d)  $x = 1, y = 3$ ; e)  $x = 2, y = 3$ ; f)  $x = 2, y = 2$ .

**Soluție. Metoda 1.** Extrăgând  $x$  din a doua ecuație și apoi înlocuind în prima, obținem:  $x = 6 - 2y \Rightarrow 2(6 - 2y) - y = 7 \Leftrightarrow -4y - y = 7 - 12 \Leftrightarrow -5y = -5 \Leftrightarrow y = 1$ . Apoi, din a doua ecuație, rezultă  $x = 6 - 2y = 6 - 2 \cdot 1 = 4$ . Deci  $x = 4, y = 1$ . **Metoda 2.** Scăzând din prima ecuație dublul ecuației a doua, obținem  $2x - y - (2x + 4y) = 7 - 2 \cdot 6 \Leftrightarrow -5y = -5 \Leftrightarrow y = 1$ ; înlocuind în ecuația a doua, obținem  $x + 2 = 6 \Leftrightarrow x = 4$ , deci  $x = 4, y = 1$ . **Metoda 3.** Sistemul are numărul de ecuații egal cu cel al necunoscutelor, iar determinantul matricii coeficienților necunoscutelor este nenul,  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ . Deci sistemul este Cramer, compatibil determinat, cu soluțiile  $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{20}{5} = 4$ , iar  $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{5}{5} = 1$ , și prin urmare  $x = 4, y = 1$ . **Ⓐ**

9. Mulțimea soluțiilor inecuației  $x^2 - 3x \leq 0$  este: **(6 pct.)**

a)  $(3, \infty)$ ; b)  $[0, 3]$ ; c)  $[-1, 3]$ ; d)  $[1, \infty)$ ; e)  $[2, \infty)$ ; f)  $(-3, 3)$ .

**Soluție.** Inecuația devine  $x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x(x - 3) \leq 0$ , deci  $x \in [x_1, x_2]$ , unde  $x_1 < x_2$  sunt cele două rădăcini distincte ale ecuației asociate  $x(x - 3) = 0$ . Deci  $x \in [0, 3]$ . **Ⓑ**

10. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât sistemul 
$$\begin{cases} ax - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$
 să aibă și soluții nenule. **(6 pct.)**

a)  $a = -5$ ; b)  $a = 5$ ; c)  $a = 1$ ; d)  $a = -2$ ; e)  $a = 4$ ; f)  $a = -4$ .

**Soluție.** Sistemul este omogen și admite și soluții nebanale d.n.d. rangul matricii coeficienților necunoscutelor este mai mic decât numărul de necunoscute. În cazul nostru, această condiție revine la anularea determinantului matricii coeficienților necunoscutelor. Acesta este  $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2a + 1 + 2) - (1 - 4 - a) = 3a + 6$ , și se anulează pentru  $a = -2$ . **Ⓓ**

11. Să se determine  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât numerele  $x, 8, 3x + 2$  să fie (în această ordine) în progresie aritmetică. **(6 pct.)**

a)  $\frac{2}{5}$ ; b)  $\frac{3}{4}$ ; c)  $\frac{5}{2}$ ; d)  $\frac{1}{3}$ ; e)  $\frac{7}{2}$ ; f)  $\frac{1}{6}$ .

**Soluție. Metoda 1.** Al doilea număr trebuie să fie media aritmetică a celorlalte două valori, deci  $8 = \frac{x + (3x + 2)}{2} \Leftrightarrow 16 = 4x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ . **Metoda 2.** Rația este diferența dintre doi termeni consecutivi ai progresiei, deci egalând cele două diferențe care dau rația, obținem:  $8 - x = (3x + 2) - 8 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$ . **Ⓔ**

12. Să se rezolve ecuația  $3^{2x-1} = 27$ . **(6 pct.)**

a)  $x = 4$ ; b)  $x = 0$ ; c)  $x = -1$ ; d)  $x = 1$ ; e)  $x = 2$ ; f)  $x = -2$ .

**Soluție.** Logaritmând ecuația în baza 3, obținem  $3^{2x-1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ . **Ⓕ**

13. Să se determine abscisa punctului de extrem local al funcției  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - \ln x$ . **(6 pct.)**

a)  $x = \sqrt{2}$ ; b)  $x = \frac{e}{2}$ ; c)  $x = 2$ ; d)  $x = 3$ ; e)  $x = 1$ ; f)  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Soluție.** Punctele de extrem sunt puncte critice ale lui  $f$ , deci puncte ale căror abscisă anulează derivata funcției  $f$ . Dar  $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$ , deci  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ . Dar singura valoare care aparține domeniului de definiție  $(0, \infty)$  este  $x_* = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ . Deoarece  $f''(x_*) = \left( 2 + \frac{1}{x^2} \right) \Big|_{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4 \neq 0$ , rezultă că  $x_* = \frac{\sqrt{2}}{2}$  este punct de extrem (mai exact, dat fiind că  $f''(x_*) > 0$ , punct de minim) pentru funcția  $f$ . **Ⓖ**

14. Să se calculeze integrala  $\int_0^1 x e^x dx$ . **(6 pct.)**

a)  $\frac{e}{3}$ ; b)  $3 - e$ ; c)  $1$ ; d)  $\frac{e}{2}$ ; e)  $e$ ; f)  $e - 1$ .

**Soluție.** Integrând prin părți, obținem:  $\int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x(e^x)' dx = (x e^x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e^x) \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1$ . **Ⓒ**

15. Fie polinoamele  $f, g \in \mathbb{R}[X]$ ,  $f = (X - 1)^{2017} + (X - 3)^{2016} + X^2 + X + 1$  și  $g = X^2 - 4X + 4$ . Să se determine restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g$ . **(6 pct.)**

a)  $6X + 1$ ; b)  $X - 1$ ; c)  $6X - 3$ ; d)  $2X + 1$ ; e)  $2X - 3$ ; f)  $X + 1$ .

**Soluție.** Folosind împărțirea cu rest a polinomului  $f$  la  $g$ , se observă că deoarece gradul împărțitorului  $g$  este 2, rezultă că restul are cel mult gradul întâi, deci este de forma  $R(x) = ax + b$ . Prin urmare avem:

$$P(x) = g(x) \cdot h(x) + R(x). \quad (1)$$

Derivând această egalitate, obținem

$$P'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) + R'(x). \quad (2)$$

Înlocuind expresia din enunț a polinomului  $f$ , relațiile (1) și (2) conduc la sistemul

$$\begin{cases} (x-1)^{2017} + (x-3)^{2016} + x^2 + x + 1 = g(x) \cdot h(x) + ax + b \\ 2017 \cdot (x-1)^{2016} + 2016 \cdot (x-3)^{2015} + 2x + 1 = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) + a. \end{cases}$$

Înlocuind  $x = 2$  și folosind faptul că această valoare este rădăcină dublă pentru  $g$  (deci  $g(2) = g'(2) = 0$ ), sistemul devine

$$\begin{cases} 1^{2017} + (-1)^{2016} + 2^2 + 2 + 1 = g(2) \cdot h(2) + 2a + b \\ 2017 \cdot 1^{2016} + 2016 \cdot (-1)^{2015} + 2 \cdot 2 + 1 = g'(2) \cdot h(2) + g(2) \cdot h'(2) + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 9 \\ a = 6, \end{cases}$$

deci  $a = 6$  și  $b = -3$ . Prin urmare restul căutat este  $R = aX + b = 6X - 3$ . ©