

1. Se consideră triunghiul  $ABC$  în care  $AC = 3$ ,  $BC = 4$  iar  $m(\hat{C}) = \frac{\pi}{3}$ . Atunci: **(6 pct.)**

a)  $AB = \sqrt{2}$ ; b)  $AB = 13$ ; c)  $AB = \sqrt{13}$ ; d)  $AB = 1$ ; e)  $AB = 5$ ; f)  $AB = \sqrt{15}$ .

**Soluție.** Aplicăm în triunghiul  $ABC$  teorema cosinusului pentru unghiul  $\hat{C}$ :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \hat{C} \Leftrightarrow AB^2 = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}.$$

2. Să se determine parametrii  $a, b \in \mathbb{R}$  știind că  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ , unde  $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$  și  $\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j}$ .

**(6 pct.)**

a)  $a = 3, b = -1$ ; b)  $a = -2, b = -1$ ; c)  $a = -1, b = 2$ ; d)  $a = 2, b = 1$ ; e)  $a = 0, b = 1$ ; f)  $a = 1, b = 2$ .

**Soluție.** Înlocuind  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  în prima egalitate și apoi identificând coeficienții vectorilor  $\vec{i}$  și respectiv  $\vec{j}$ , obținem  $3\vec{i} - \vec{j} = a(\vec{i} - \vec{j}) + b(\vec{i} + \vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ .

3. Latura pătratului de arie  $4 \text{ cm}^2$  are lungimea: **(6 pct.)**

a)  $2\sqrt{2} \text{ cm}$ ; b)  $2 \text{ cm}$ ; c)  $\frac{1}{2} \text{ cm}$ ; d)  $1 \text{ cm}$ ; e)  $\sqrt{2} \text{ cm}$ ; f)  $8 \text{ cm}$ .

**Soluție.** Latura pătratului este  $\sqrt{4 \text{ cm}^2} = 2 \text{ cm}$ .

4. Să se calculeze produsul  $P = \sin 60^\circ \cdot \text{tg } 45^\circ \cdot \cos 30^\circ$ . **(6 pct.)**

a)  $\frac{3}{4}$ ; b)  $0$ ; c)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ; d)  $\frac{1}{2}$ ; e)  $\frac{4}{3}$ ; f)  $1$ .

**Soluție.** Înlocuind factorii din produs, obținem  $P = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$ .

5. Simetricul  $C$  al punctului  $A(1, 2)$  față de punctul  $O(0, 0)$  este: **(6 pct.)**

a)  $C(1, 2)$ ; b)  $C(2, 1)$ ; c)  $C(-\frac{1}{2}, -1)$ ; d)  $C(-1, 2)$ ; e)  $C(-1, -2)$ ; f)  $C(\frac{1}{2}, 1)$ .

**Soluție.** Condiția de simetrie este echivalentă cu proprietatea punctului  $O$  de a fi mijlocul segmentului  $AC$ . Deci punctul  $C$  satisface egalitatea  $2 \cdot O = A + C \Leftrightarrow C = 2 \cdot O - A = (0, 0) - (1, 2) = (-1, -2)$ .

6. Se dau vectorii  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  și  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ . Atunci vectorul  $\vec{u} + \vec{v}$  este: **(6 pct.)**

a)  $\vec{i} + \vec{j}$ ; b)  $3\vec{i} + 5\vec{j}$ ; c)  $5\vec{i} + 3\vec{j}$ ; d)  $2\vec{i} - \vec{j}$ ; e)  $3\vec{i} + 4\vec{j}$ ; f)  $\vec{i} - \vec{j}$ .

**Soluție.** Adunând coeficienții corespunzători vectorilor  $\vec{i}$  respectiv  $\vec{j}$ , obținem:  $\vec{u} + \vec{v} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) + (\vec{i} + 2\vec{j}) = (2 + 1)\vec{i} + (3 + 2)\vec{j} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ .

7. Aflați valoarea parametrului  $a \in \mathbb{R}$  pentru care vectorii  $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$  și  $\vec{v} = -a\vec{i} + 3\vec{j}$  sunt perpendiculari. **(6 pct.)**

a)  $a = 0$ ; b)  $a = 1$ ; c)  $a = 6$ ; d)  $a = -3$ ; e)  $a = 2$ ; f)  $a = -6$ .

**Soluție.** Perpendicularitatea celor doi vectori este echivalentă cu anularea produsului lor scalar:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{i} - 2\vec{j}, -a\vec{i} + 3\vec{j} \rangle = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (-a) + (-2) \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow a = -6.$$

8. În triunghiul ascuțitunghic  $ABC$  se cunosc:  $m(\hat{A}) = 45^\circ$ ,  $m(\hat{B}) = 60^\circ$  și  $BC = 2$ . Atunci: **(6 pct.)**

a)  $AC = 1$ ; b)  $AC = 3$ ; c)  $AC = \sqrt{6}$ ; d)  $AC = 4$ ; e)  $AC = \sqrt{2}$ ; f)  $AC = 2$ .

**Soluție.** Aplicăm teorema sinusului în triunghiul  $ABC$ :  $\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6}$ .

9. În triunghiul  $ABC$  se dau  $AB = AC = 5$  și  $BC = 6$ . Atunci înălțimea dusă din  $A$  are lungimea: **(6 pct.)**

a)  $1$ ; b)  $8$ ; c)  $4$ ; d)  $5$ ; e)  $3$ ; f)  $2$ .

**Soluție.** Triunghiul  $ABC$  este isoscel, deci mediana  $AD$  corespunzătoare laturii  $BC$  ( $D \in BC$ ,  $BD = DC$ ) este și înălțime, deci  $\widehat{ADC} = 90^\circ$ . Observăm că  $DC = \frac{BC}{2} = 3$ . Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic  $ADC$ , rezultă  $AD^2 = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ .

10. Laturile triunghiului  $ABC$  au lungimile  $1, 1, \sqrt{2}$ . Atunci raza  $R$  a cercului circumscris triunghiului este: **(6 pct.)**

a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $\sqrt{2}$ ; c)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ; d)  $1$ ; e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; f)  $\frac{1}{3}$ .

**Soluție.** Cele trei lungimi din enunț sunt numere pitagoreice ( $\sqrt{2}^2 = 1^2 + 1^2$ ), deci triunghiul este dreptunghic, iar raza cercului circumscris este de lungime jumătate din cea a ipotenuzei, deci  $\sqrt{2}/2$ .

11. Să se determine valoarea lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care dreapta de ecuație  $mx + y = 1$  este paralelă cu dreapta  $2x - y = 3$ . **(6 pct.)**

a)  $m = -\frac{1}{2}$ ; b)  $m = -1$ ; c)  $m = \frac{1}{2}$ ; d)  $m = 2$ ; e)  $m = 1$ ; f)  $m = -2$ .

**Soluție.** Paralelismul celor două drepte revine la proporționalitatea coeficienților celor două variabile din ecuațiile acestora:  $\frac{m}{2} = \frac{1}{-1} \Leftrightarrow m = -2$ .

12. Soluțiile din intervalul  $(0, \pi)$  ale ecuației  $\sin x + \sin 3x = 0$  sunt: **(6 pct.)**

a)  $\{\frac{\pi}{2}\}$ ; b)  $\{\frac{\pi}{12}\}$ ; c)  $\{\frac{\pi}{8}\}$ ; d)  $\{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\}$ ; e)  $\{\frac{\pi}{6}\}$ ; f)  $\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\}$ .

**Soluție. Metoda 1.** Folosind imparitatea funcției sinus, ecuația se rescrie  $\sin x = \sin(-3x)$ , deci

$$x \in \{k\pi + (-1)^k(-3x) | k \in \mathbb{Z}\} = \{k\pi + 3 \cdot (-1)^{k+1} \cdot x | k \in \mathbb{Z}\} = \\ \{k\pi/4 | k \in \mathbb{Z}, k \text{ par}\} \cup \{k\pi/2 | k \in \mathbb{Z}, k \text{ impar}\} = \{k\pi/2 | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Rezultă că soluțiile admisibile, care aparțin intervalului  $(0, \pi)$  se rezumă la  $\{\frac{\pi}{2}\}$ . **Metoda 2.** Folosim formula  $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$  și obținem:  $2 \sin 2x \cos x = 0 \Leftrightarrow \{k\pi/2 | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(2k+1)\pi/2 | k \in \mathbb{Z}\}$ . Soluțiile admisibile, care aparțin intervalului  $(0, \pi)$ , se rezumă la mulțimea  $\{\frac{\pi}{2}\}$ . **Metoda 3.** Folosim imparitatea funcției sinus și formula  $\sin 3x = 3a - 4a^3$ , unde  $a = \sin x$ . Obținem  $a = -(3a - 4a^3) \Leftrightarrow 4a(a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow a \in \{-1, 0, 1\}$ . Dar  $x \in (0, \pi)$  implică  $a > 0$ , deci  $a = 1$  este singura variantă admisibilă, care conduce la  $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$ .

13. Fie  $A(0, 1)$ ,  $B(1, 1)$  și  $C(1, 0)$ . Atunci aria triunghiului  $ABC$  este: **(6 pct.)**

a)  $1$ ; b)  $\frac{1}{2}$ ; c)  $\sqrt{2}$ ; d)  $\frac{1}{3}$ ; e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; f)  $\frac{2}{3}$ .

**Soluție. Metoda 1.** Aplicăm formula ariei triunghiului:  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}$ . **Metoda 2.**

Triunghiul reprezintă jumătate din pătratul  $OABC$  de arie  $1$ , deci aria sa este  $\frac{1}{2}$ .

14. Aflați valoarea parametrului  $m \in \mathbb{R}$  pentru care punctul  $P(1, m)$  aparține dreptei  $x + y = 2$ . **(6 pct.)**

a)  $m = 2$ ; b)  $m = 0$ ; c)  $m = 1$ ; d)  $m = -2$ ; e)  $m = \sqrt{2}$ ; f)  $m = -1$ .

**Soluție.** Punctul  $P$  aparține dreptei d.n.d. coordonatele sale satisfac ecuația acesteia, deci  $1 + m = 2 \Rightarrow m = 1$ .

15. Dacă  $\sin x = \frac{1}{2}$ ,  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , atunci  $\operatorname{tg} x$  este: **(6 pct.)**

a)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; b)  $\sqrt{3}$ ; c)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; d)  $1$ ; e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; f)  $\sqrt{2}$ .

**Soluție. Metoda 1.** Există o unică soluție a ecuației  $\sin x = \frac{1}{2}$  care aparține intervalului  $(0, \frac{\pi}{2})$ , anume  $x = \frac{\pi}{6}$ , deci  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . **Metoda 2.** Folosind formula trigonometrică fundamentală, obținem  $\cos x \in \{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}\} = \{\pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}}\} = \{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\}$ . Dar  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , deci  $\cos x > 0$  și prin urmare  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , iar  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .