1. Dacă $\sin x = \frac{2}{3}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci $\operatorname{tg} x$ este: **(5 pct.)**

   a) 2; b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; d) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$; e) $2\sqrt{5}$; f) $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

   Soluţie. Folosind formula trigonometrică fundamentală $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ şi ţinând cont că $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos x > 0$, obţinem $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - (\frac{2}{3})^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Atunci $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2/3}{\sqrt{5}/3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2. Un pătrat are diagonala de $2\sqrt{2}$ cm. Atunci aria pătratului este: **(5 pct.)**

   a) $10\,\text{cm}^2$; b) $8\,\text{cm}^2$; c) $4\,\text{cm}^2$; d) $5\,\text{cm}^2$; e) $4\sqrt{2}\,\text{cm}^2$; f) $6\,\text{cm}^2$.

   Soluţie. Diagonala de lungime $d = 2\sqrt{2}$ şi latura de lungime ℓ a pătratului satisfac egalitatea $\ell = d\cos 45°$. În concluzie $\ell = 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

3. Aflaţi aria rombului care are latura de 10 cm şi o diagonală de 12 cm. **(5 pct.)**

   a) $192\,\text{cm}^2$; b) $48\,\text{cm}^2$; c) $96\,\text{cm}^2$; d) $120\,\text{cm}^2$; e) $100\,\text{cm}^2$; f) $144\,\text{cm}^2$.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Latura rombului este ipotenuză în triunghiul dreptunghic format cu două semidiagonale corespunzătoare ale rombului. Atunci semidiagonala a doua (necunoscută) a rombului are lungimea $\sqrt{10^2 - (\frac{12}{2})^2} = 8$. Diagonalele rombului au deci lungimile $d_1 = 12$, respectiv $d_2 = 2 \cdot 8 = 16$. Rombul fiind patrulater ortodiagonal, are aria $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$. ***Metoda 2.*** Se află lungimea 8 a celei de-a doua semidiagonale, ca mai sus. Atunci aria triunghiului dreptunghic considerat este jumătate din produsul catetelor, $\frac{6 \cdot 8}{2} = 24$. Rombul este format din patru asemenea triunghiuri congruente, deci aria sa va fi $4 \cdot 24 = 96$.

4. Se dau dreptele de ecuaţii $2x + 3y - 7 = 0$ şi $mx - 2y = 0$. Să se afle valoarea parametrului real m pentru care dreptele sunt perpendiculare. **(5 pct.)**

   a) $m = -2$; b) $m = 3$; c) $m = -3$; d) $m = 2$; e) $m = 1$; f) $m = -1$.

   Soluţie. Dreptele sunt perpendiculare dacă pantele lor au produsul egal cu -1. Dar ecuaţiile dreptelor se rescriu $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, respectiv $y = \frac{m}{2}x$, deci pantele acestora sunt respectiv $-\frac{2}{3}$ şi $\frac{m}{2}$. Prin urmare condiţia de ortogonalitate se rescrie $-\frac{2}{3} \cdot \frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 3$.

5. Să se calculeze produsul $P = \sin 45° \cos 30° \operatorname{tg} 60°$. **(5 pct.)**

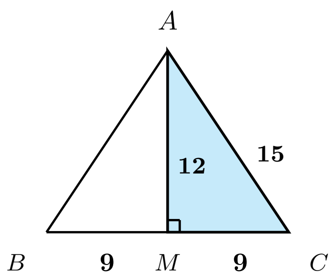
   a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; b) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; c) $\sqrt{3}$; d) $\sqrt{2}$; e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

   Soluţie. $P = \sin 45° \cos 30° \operatorname{tg} 60° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

6. În triunghiul isoscel ABC în care $AB = AC = 15$ cm, înălţimea dusă din A este de 12 cm. Atunci lungimea laturii BC este: **(5 pct.)**

   a) $16\sqrt{3}$ cm; b) 18 cm; c) 24 cm; d) $16\sqrt{5}$ cm; e) $16\sqrt{2}$ cm; f) 20 cm.

   Soluţie. Fie $M \in BC$ piciorul înălţimii duse din vârful A al triunghiului (vezi figura). Atunci triunghiul AMC este dreptunghic; aplicând teorema lui Pitagora, obţinem $MC^2 = AC^2 - AM^2 = 15^2 - 12^2 = 81$, deci $MC = 9$. Ţinând cont că înălţimea AM este şi mediană în triunghiul isoscel dat, obţinem $BC = 2MC = 18$.



7. Se dau vectorii $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$, $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{w} = 2\bar{i} + 7\bar{j}$. Dacă $p\bar{u} + q\bar{v} = \bar{w}$, atunci produsul $p \cdot q$ este: **(5 pct.)**

   a) 0; b) 1; c) 4; d) 3; e) -3; f) -4.

   Soluţie. Relaţia din enunţ se rescrie $p\bar{u} + q\bar{v} = \bar{w} \Leftrightarrow p(2\bar{i} - 3\bar{j}) + q(\bar{i} + \bar{j}) = 2\bar{i} + 7\bar{j} \Leftrightarrow (2p + q - 2)\bar{i} + (-3p + q - 7)\bar{j} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p + q - 2 = 0 \\ -3p + q - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -1 \\ q = 4 \end{cases}$, deci $pq = -4$.

8. Aflaţi parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\bar{u} = m\bar{i} + 2\bar{j}$ şi $\bar{v} = 3\bar{i} - 6\bar{j}$ să fie coliniari. **(5 pct.)**

   a) $m = 1$; b) $m = -1$; c) $m = 3$; d) $m = -2$; e) $m = 2$; f) $m = 0$.

   Soluţie. Pentru a fi coliniari, cei doi vectori trebuie să aibă componentele corespunzătoare proporţionale, deci să satisfacă relaţia $\frac{m}{3} = \frac{2}{-6} \Leftrightarrow m = -1$.

9. Fie vectorii $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ şi $\bar{v} = -3\bar{i} - 4\bar{j}$. Să se calculeze lungimea vectorului $4\bar{u} + 2\bar{v}$. **(5 pct.)**

   a) $5\sqrt{3}$; b) $5\sqrt{2}$; c) $2\sqrt{5}$; d) $3\sqrt{5}$; e) $\sqrt{5}$; f) 6.

   Soluţie. Avem $4\bar{u} + 2\bar{v} = 4(2\bar{i} + 3\bar{j}) + 2(-3\bar{i} - 4\bar{j}) = 2\bar{i} + 4\bar{j}$, deci $|4\bar{u} + 2\bar{v}| = |2\bar{i} + 4\bar{j}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

10. Se consideră ecuaţia $8\cos x - 1 = 4\sin^2 x$, unde $x \in [0, 2\pi]$. Suma soluţiilor ecuaţiei este: **(5 pct.)**

    a) $\frac{5\pi}{3}$; b) 2π; c) 0; d) π; e) $\frac{\pi}{3}$; f) $\frac{3\pi}{2}$.

    Soluţie. Folosind formula trigonometrică fundamentală $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ sî notând $c = \cos x \in [-1, 1]$, ecuaţia se rescrie $8c - 1 = 4(1 - c^2) \Leftrightarrow 4c^2 + 8c - 5 = 0 \Leftrightarrow c \in \{\frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{4}\} = \{\frac{-4 \pm 6}{4}\} = \{\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\}$. Dar $-\frac{5}{2} = -2.5 \notin [-1, 1]$, nu convine. Atunci $\cos x = \frac{1}{2}$ conduce la $x \in \{2k\pi \pm \frac{\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\}$. Din această mulţime doar valorile $\frac{\pi}{3}$ şi $\frac{5\pi}{3}$ se află în intervalul $[0, 2\pi]$ indicat în enunţ, deci suma acestora este $\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 2\pi$.

11. Distanţa dintre punctele $A(2, 3)$ şi $B(5, 7)$ este: **(5 pct.)**

    a) 6; b) 4; c) 3; d) 5; e) 10; f) $\frac{5}{2}$.

    Soluţie. Distanţa dintre punctele $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ este

    $$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

12. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{A}) = 90°$, $m(\hat{B}) = 60°$ şi $AB = 6\,\text{cm}$. Calculaţi perimetrul triunghiului. **(5 pct.)**

    a) $(9 + 18\sqrt{3})\,\text{cm}$; b) $(9 + 6\sqrt{3})\,\text{cm}$; c) $(6 + 18\sqrt{3})\,\text{cm}$; d) $(18 + \sqrt{3})\,\text{cm}$; e) $(6 + 9\sqrt{3})\,\text{cm}$; f) $(18 + 6\sqrt{3})\,\text{cm}$.

    Soluţie. Triunghiul este dreptunghic în $\hat{A}$, deci $AC = AB \operatorname{tg} \hat{B} = 6 \cdot \operatorname{tg} 60° = 6\sqrt{3}$, iar $BC = \frac{AB}{\cos 60°} = \frac{6}{1/2} = 12$, deci perimetrul triunghiului este $AB + BC + AC = 6 + 6\sqrt{3} + 12 = 18 + 6\sqrt{3}$.

13. Aflaţi valoarea parametrului $m \in (0, \infty)$ ştiind că aria triunghiului ABC de vârfuri $A(1, 1)$, $B(2, 0)$ şi $C(0, m)$ este 1. **(5 pct.)**

    a) $m = 3$; b) $m = \frac{1}{2}$; c) $m = \frac{3}{2}$; d) $m = 1$; e) $m = 4$; f) $m = 2$.

    Soluţie. ***Metoda 1.*** Egalând aria triunghiului scrisă sub formă de determinant cu 1, obţinem $|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix}| = 1 \Leftrightarrow |\frac{1}{2}(m - 2)| = 1 \Leftrightarrow |m - 2| = 2 \Leftrightarrow m \in \{0, 4\}$. Dar $m \in (0, \infty)$, deci singura soluţie validă este $m = 4$. ***Metoda 2.*** Triunghiul din enunţ are baza $b = AB = \sqrt{(2 - 1)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{2}$ şi înălţimea h egală cu distanţa de la M la dreapta AB. Ecuaţia acestei drepte este $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{0-1} \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$, deci distanţa este $h = \frac{|0+m-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|m-2|}{\sqrt{2}}$, iar condiţia din enunţ se rescrie $\frac{b \cdot h}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot |m-2||}{2\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow |m - 2| = 2 \Leftrightarrow m \in \{0, 4\}$, dar $0 \notin (0, \infty)$, deci soluţia este $m = 4$.

14. Fie triunghiul ABC cu $BC = 6\,\text{cm}$ şi $\cos \hat{A} = -\frac{1}{2}$. Raza cercului circumscris triunghiului are lungimea: **(5 pct.)**

    a) $2\sqrt{3}\,\text{cm}$; b) $4\sqrt{2}\,\text{cm}$; c) $4\sqrt{3}\,\text{cm}$; d) $\sqrt{2}\,\text{cm}$; e) $3\sqrt{2}\,\text{cm}$; f) $\sqrt{3}\,\text{cm}$.

    Soluţie. Conform teoremei extinse a sinusului, notând cu R raza cercului circumscris triunghiului, avem $\frac{BC}{\sin \hat{A}} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{BC}{2\sin \hat{A}} = \frac{6}{2\sin \hat{A}} = \frac{3}{\sin \hat{A}}$. Din formula trigonometrică fundamentală $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$, deci $\sin A = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \hat{A}} = \pm\sqrt{1 - (-\frac{1}{2})^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dar $\hat{A} \in (0, \pi)$ implică $\sin \hat{A} > 0$, deci $\sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Prin urmare $R = \frac{3}{\sqrt{3}/2} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

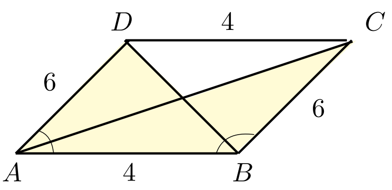
15. Fie paralelogramul $ABCD$ cu laturile $AB = 6$ şi $AD = 4$. Să se afle suma pătratelor diagonalelor. **(5 pct.)**

a) 104; b) 208; c) 100; d) 156; e) 56; f) 52.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Fie S_ℓ suma pătratelor laturilor şi S_d suma pătratelor diagonalelor. Atunci are loc relaţia $S_\ell = 2S_d$. Dar laturile fiind pe perechi egale, obţinem $S_\ell = 2(6^2 + 4^2) = 208$, deci $S_d = \frac{208}{2} = 104$. ***Metoda 2.*** Aplicăm teorema cosinusurilor în triunghiurile DAB şi ABC (vezi figura); obţinem:

$$\cos \hat{A} = \frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB} = \frac{36+16-BD^2}{2\cdot 6\cdot 4}.$$
$$\cos \hat{B} = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC} = \frac{36+16-AC^2}{2\cdot 6\cdot 4}$$

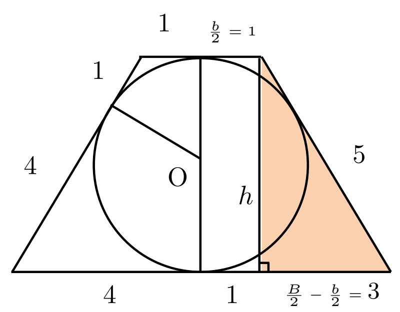
Se observă că $BC = AD = 4$ şi $\hat{A} + \hat{B} = 180° \Rightarrow \cos \hat{B} = -\cos \hat{A}$. Atunci, adunând egalităţile de mai sus termen cu termen, obţinem $0 = \frac{2\cdot 52-(BD^2+AC^2)}{48} \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = 104$.



16. Un trapez isoscel circumscris unui cerc are lungimile bazelor de 8 cm şi 2 cm. Să se calculeze aria trapezului. **(5 pct.)**

a) $10\,\text{cm}^2$; b) $20\,\text{cm}^2$; c) $24\,\text{cm}^2$; d) $25\,\text{cm}^2$; e) $32\,\text{cm}^2$; f) $36\,\text{cm}^2$.

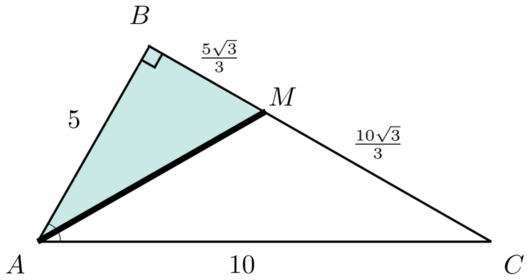
Soluţie. Tangentele duse la cercul înscris trapezului duse din vârfurile acestuia au lungimi egale (vezi figura), deci latura neparalelă va fi de lungime egală cu suma semibazelor, $\frac{8}{2} + \frac{2}{2} = 5$. Proiecţia unei laturi neparalele pe baza mare are ca lungime semidiferenţa bazelor, $\frac{8-2}{2} = 3$. Această proiecţie formează cu înălţimea şi cu latura neparalelă un triunghi dreptunghic, deci aplicând teorema Pitagora, rezultă înălţimea $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Aria trapezului este semisuma bazelor înmulţită cu înălţimea, $\frac{8+2}{2} \cdot 4 = 20$.



17. Fie triunghiul ABC cu $AB = 5\,\text{cm}$, $AC = 10\,\text{cm}$ şi $m(\hat{A}) = 60°$. Să se calculeze lungimea bisectoarei din A. **(5 pct.)**

a) $3\sqrt{3}\,\text{cm}$; b) $\sqrt{3}\,\text{cm}$; c) $\frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$; d) $10\sqrt{3}\,\text{cm}$; e) $\frac{5\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$; f) $2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

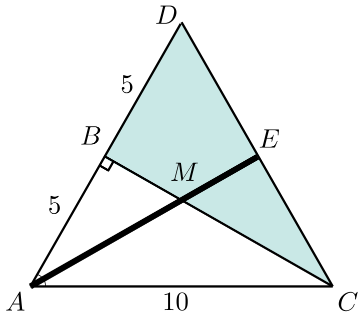
Soluţie. ***Metoda 1.*** Folosind teorema bisectoarei pentru bisectoarea dusă din vârful A al triunghiului, şi notând cu $M \in BC$ intersecţia bisectoarei cu latura opusă BC, rezultă $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC} \Leftrightarrow \frac{5}{10} = \frac{MB}{MC} \Leftrightarrow MC = 2MB$. Folosind teorema cosinusului pentru unghiul $\hat{A}$, obţinem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A} = 25 + 100 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 75$, deci $BC = 5\sqrt{3}$. Dar $BC = MC + MB = 3MB$, deci $BC = 3MB = 5\sqrt{3} \Rightarrow MB = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Se observă că numerele $AB = 5$, $BC = 5\sqrt{3}$ şi $CA = 10$ sunt pitagoreice, deci triunghiul ABC este dreptunghic în B. Din teorema Pitagora în triunghiul dreptunghic ABM, rezultă bisectoarea: $AM^2 = AB^2 + BM^2 = 25 + \frac{25}{3} = \frac{100}{3} \Rightarrow AM = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.



Metoda 2. Ca mai sus, obţinem $BC = 5\sqrt{3}$ şi $MB = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Folosim faptul că AM bisectează unghiul $\hat{A}$ de $60°$ şi teorema sinusului în triunghiurile ABM şi ABC; rezultă

$$\frac{AM}{\sin \hat{B}} = \frac{BM}{\sin \widehat{BAM}}, \ \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}},$$

de unde rezultă $\sin \hat{B} = \frac{AM \cdot \sin \widehat{BAM}}{BM} = \frac{AC \cdot \sin \hat{A}}{BC} \Rightarrow \frac{AM \cdot \sin 30°}{5\sqrt{3}/3} = \frac{10 \cdot \sin 60°}{5\sqrt{3}} \Leftrightarrow AM = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.



Metoda 3. Prelungim latura AB cu segmentul $BD = 5$ (vezi figura). Astfel obţinem triunghiul ADC care este isoscel ($AD = AC = 10$ şi care are unghiul $\hat{A}$ de $60°$, deci care este triunghi echilateral. Fie $E \in DC$ punctul de intersecţie al bisectoarei AM cu latura DC. Bisectoarea AM este şi mediană în triunghiul echilateral ADC, la fel ca şi CB ($AB = BD$). Rezultă că AM intersectează mediana CB în centrul de greutate M, deci, folosind faptul că medianele AE şi BC sunt congruente, avem $AM = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}CB$. Dar mediana CB este şi înălţime în triunghiul echilateral ADC de latură $\ell = AC = 10$, deci are lungimea $\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$. Rezltă $AM = \frac{2}{3} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

18. Să se calculeze $\arccos\left(\operatorname{tg} \frac{207\pi}{4}\right)$. **(5 pct.)**

a) 0; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) π; d) $\frac{\pi}{4}$; e) $\frac{\pi}{2}$; f) $\frac{3\pi}{4}$.

Soluţie. Folosind faptul că funcţia tg este impară şi de perioadă π, rezultă $\operatorname{tg} \frac{207\pi}{4} = \operatorname{tg} \frac{(208-1)\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(52\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$. Atunci $\arccos\left(\operatorname{tg} \frac{207\pi}{4}\right) = \arccos(-1) = \pi$.