Universitatea Politehnica din Bucureşti 2015
Disciplina: Geometrie şi Trigonometrie
Varianta B * Facultăţi care au avut în anul 2014 admitere pe bază de dosar

1. Se dau dreptele de ecuaţii $y = 2x + 3$ şi $y = mx + 4$, unde $m \in \mathbb{R}$. Dacă dreptele sunt paralele, atunci m este: **(5 pct.)**

   a) 0; b) 1; c) -3; d) 3; e) 2; f) 4.

   Soluţie. Pantele celor două drepte sunt egale, deci $m = 2$.

2. Dacă $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{v} = 2\bar{i} - \bar{j}$, atunci lungimea vectorului $\bar{u} + \bar{v}$ este: **(5 pct.)**

   a) $\sqrt{2}$; b) 4; c) 2; d) 1; e) 3; f) $\sqrt{3}$.

   Soluţie. $\bar{u} + \bar{v} = (\bar{i} + \bar{j}) + (2\bar{i} - \bar{j}) = 3\bar{i} = 3\bar{i}$, deci $|\bar{u} + \bar{v}| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$.

3. Aria cercului cu diametrul de 16 cm este: **(5 pct.)**

   a) $36\pi\,\mathrm{cm}^2$; b) $25\pi\,\mathrm{cm}^2$; c) $64\pi\,\mathrm{cm}^2$; d) $16\pi\,\mathrm{cm}^2$; e) $3\pi\,\mathrm{cm}^2$; f) $4\pi\,\mathrm{cm}^2$.

   Soluţie. Raza este $r = \frac{16}{2} = 8$, deci aria este $\pi r^2 = 64\pi$.

4. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(3, 5)$ şi $B(1, 0)$ este: **(5 pct.)**

   a) $5x - 2y + 5 = 0$; b) $5x - 2y - 5 = 0$; c) $5x + 2y - 5 = 0$; d) $2x - 5y - 5 = 0$; e) $2x + 5y - 5 = 0$; f) $5x + 2y + 5 = 0$.

   Soluţie. Aplicăm formula care produce ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$, $\Delta : \frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x-3}{1-3} = \frac{y-5}{0-5} \Leftrightarrow 5(x - 3) = 2(y - 5) \Leftrightarrow 5x - 2y - 5 = 0$.

5. Dacă $\sin x = \frac{1}{3}$ şi $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci $\cos x$ este: **(5 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; d) $\frac{3}{4}$; e) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; f) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

   Soluţie. Folosind formula trigonometrică fundamentală $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ şi folosind faptul că funcţia cos ia valori nenegative pe intervalul $(0, \frac{\pi}{2})$, obţinem $\cos x = \sqrt{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

6. Câte soluţii are ecuaţia $\sin x + \cos x = 1$ în intervalul $[0, \pi]$? **(5 pct.)**

   a) 1; b) 2; c) 3; d) 5; e) 0; f) 4.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Folosind formulele $\cos a = \sin(\frac{\pi}{2} - a)$ şi $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, ecuaţia se rescrie $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 1 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$. Dar condiţia din enunţ $x \in [0, \pi]$ conduce la soluţiile $x = 0$ şi $x = \frac{\pi}{2}$, prin urmare două ecuaţia are exact soluţii. ***Metoda 2.*** Ridicăm la pătrat ecuaţia (noua ecuaţie putând să admită şi soluţii care nu satisfac ecuaţia iniţială). Folosind formula trigonometrică fundamentală $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ şi formula de trecere la arc dublu $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, obţinem $(\sin x + \cos x)^2 = 1 \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$. Ţinând cont de condiţia din enunţ $x \in [0, \pi]$, rămân ca posibile soluţii $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$. Dar $x = \pi$ nu satisface ecuaţia *iniţială din enunţ*, deci rămăn valide soluţiile $x \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$. ***Metoda 3.*** Amplificăm ecuaţia cu $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Folosind formula $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, rezultă

   $$\sin x \cos \tfrac{\pi}{4} + \cos x \sin \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) = \sin \tfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x + \tfrac{\pi}{4} \in \left\{k\pi + (-1)^k \tfrac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \Leftrightarrow$$
   $$x + \tfrac{\pi}{4} \in \left\{2k\pi + \tfrac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{(2k+1)\pi - \tfrac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \Leftrightarrow x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{(2k+1)\pi - \tfrac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

   Ţinând cont de condiţia $x \in [0, \pi]$, rezultă $x \in \{0, \frac{\pi}{2}\}$.

7. Valoarea sumei $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{4}$ este: **(5 pct.)**

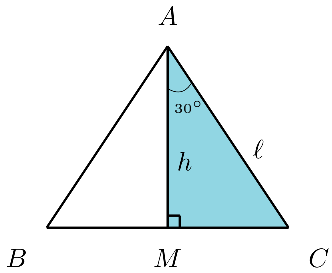
   a) 1; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{5}{4}$; f) $\frac{1}{2}$.

   Soluţie. Obţinem: $\cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

8. Un triunghi echilateral cu latura egală cu $4\,\text{cm}$ are aria: **(5 pct.)**

a) $4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; b) $16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; c) $\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; d) $2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; e) $16\,\text{cm}^2$; f) $4\,\text{cm}^2$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Dacă $\ell = 4$ este latura triunghiului echilateral, atunci aria este $S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$. ***Metoda 2.*** Înălţimea AM a triunghiului (vezi figura) este şi bisectoare, deci în triunghiul dreptunghic AMC mărimea unghiului $\widehat{MAC}$ este de $30°$. Atunci, notând cu h lungimea catetei AM, şi cu ℓ lungimea ipotenuzei AC, avem egalitatea $\frac{h}{\ell} = \cos 30°$. Rezultă $h = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, deci $S = \frac{\ell \cdot h}{2} = 4\sqrt{3}$.



9. Fie vectorii $\bar{u} = 2\bar{i} + 4\bar{j}$ şi $\bar{v} = 2m\bar{i} + (3m-1)\bar{j}$, unde $m \in \mathbb{R}$. Dacă $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ sunt perpendiculari, atunci: **(5 pct.)**

a) $m = 2$; b) $m = -1$; c) $m = 1$; d) $m = 0$; e) $m = \frac{1}{4}$; f) $m = \frac{3}{4}$.

Soluţie. Vectorii sunt perpendiculari dacă produsul lor scalar este nul, $2 \cdot 2m + 4 \cdot (3m-1) = 0 \Leftrightarrow 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

10. Într-un cerc se înscrie un triunghi cu laturile de $5\,\text{cm}$, $12\,\text{cm}$ şi $13\,\text{cm}$. Atunci raza cercului este: **(5 pct.)**

a) $\frac{5}{2}$ cm; b) $\frac{17}{2}$ cm; c) $6\,\text{cm}$; d) $\frac{13}{2}$ cm; e) $\frac{11}{2}$ cm; f) $7\,\text{cm}$.

Soluţie. Cele trei lungimi sunt numere pitagoreice ($5^2 + 12^2 = 13^2$), deci triunghiul este dreptunghic. Atunci raza cercului circumscris este are lungimea cât jumătate din ipotenuză, deci $\frac{13}{2}$.

11. Într-un triunghi dreptunghic ipotenuza este de $5\,\text{cm}$, iar o catetă este de $3\,\text{cm}$. Atunci cealaltă catetă este de: **(5 pct.)**

a) $5\,\text{cm}$; b) $2\,\text{cm}$; c) $7\,\text{cm}$; d) $3\,\text{cm}$; e) $1\,\text{cm}$; f) $4\,\text{cm}$.

Soluţie. Aplicând teorema lui Pitagora, rezultă lungimea catetei cerute: $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

12. Aflaţi valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(1, m)$ aparţine dreptei de ecuaţie $3x + 2y = 7$. **(5 pct.)**

a) $m = 0$; b) $m = 4$; c) $m = -2$; d) $m = 1$; e) $m = 3$; f) $m = 2$.

Soluţie. Coordonatele punctului A satisfac ecuaţia dreptei, deci $3 \cdot 1 + 2m = 7 \Leftrightarrow m = 2$.

13. Un dreptunghi are perimetrul de $44\,\text{cm}$. Ştiind că una dintre laturi are lungimea de $10\,\text{cm}$, să se afle aria dreptunghiului. **(5 pct.)**

a) $160\,\text{cm}^2$; b) $120\,\text{cm}^2$; c) $180\,\text{cm}^2$; d) $240\,\text{cm}^2$; e) $110\,\text{cm}^2$; f) $100\,\text{cm}^2$.

Soluţie. Dreptunghiul are două laturi de lungime 10 şi două laturi de lungime $\frac{44-2\cdot 10}{2} = 12$, deci aria sa este $12 \cdot 10 = 120$.

14. Suma măsurilor unghiurilor unui romb este: **(5 pct.)**

a) $300°$; b) $180°$; c) $270°$; d) $720°$; e) $540°$; f) $360°$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Rombul este un patrulater convex cu $n = 4$ laturi, deci suma unghiurilor interioare este $(n-2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°$. ***Metoda 2.*** Rombul este un patrulater convex în care orice diagonală îl împarte în două triunghiuri adiacente. Suma unghiurilor celor două triunghiuri este egală cu suma unghiurilor rombului, care devine astfel $180° + 180° = 360°$. ***Metoda 3.*** Rombul are unghiurile alăturate suplementare, deci suma unghiurilor sale este $2 \cdot 180° = 360°$.

15. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{A}) = 35°$, $m(\hat{B}) = 50°$. Calculaţi $m(\hat{C})$. **(5 pct.)**

a) $90°$; b) $85°$; c) $105°$; d) $80°$; e) $75°$; f) $95°$.

Soluţie. $m(\hat{C}) = 180° - (m(\hat{A}) + m(\hat{B})) = 180° - (35° + 50°) = 95°$.

16. În triunghiul ABC se dau: $m(\hat{A}) = 45°$, $AB = 3\,\text{cm}$, $AC = 4\,\text{cm}$. Atunci aria triunghiului este: **(5 pct.)**

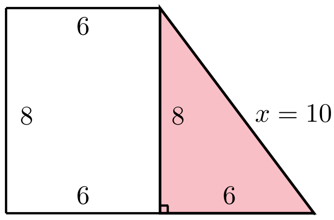
a) $3\,\text{cm}^2$; b) $3\sqrt{2}\,\text{cm}^2$; c) $2\sqrt{2}\,\text{cm}^2$; d) $3\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; e) $2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; f) $6\,\text{cm}^2$.

Soluţie. Aria căutată este $\frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \sin 45°}{2} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

17. Un trapez dreptunghic are bazele de $6\,\text{cm}$ şi $12\,\text{cm}$ iar înălţimea de $8\,\text{cm}$. Să se afle perimetrul trapezului. **(5 pct.)**

a) $16\,\text{cm}$; b) $40\,\text{cm}$; c) $26\,\text{cm}$; d) $20\,\text{cm}$; e) $34\,\text{cm}$; f) $36\,\text{cm}$.

Soluţie. Proiecţia laturii neparalele oblice pe baza mare formează cu înălţimea şi latura oblică un triunghi dreptunghic cu laturile de lungime respectiv 6, 8 şi x (vezi figura). Aplicând teorema lui Pitagora în acest triunghi, obţinem $x = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, deci perimetrul trapezului este $12 + 6 + 8 + 10 = 36$.



18. Fie punctele $A(-1, 3)$ şi $B(5, 1)$. Mijlocul segmentului $[AB]$ are coordonatele: **(5 pct.)**

a) $(-2, 2)$; b) $(1, 1)$; c) $(1, 2)$; d) $(-2, -2)$; e) $(2, 1)$; f) $(2, 2)$.

Soluţie. Coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$ sunt semisumele coordonatelor capetelor segmentului $[AB]$, deci acestea sunt $(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}) = (2, 2)$.