1. Pentru $n \in \mathbb{N}^\star$, notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Câte numere naturale nenule n satisfac inegalitatea $n! \leq 120$? **(5 pct.)**

   a) 8; b) 4; c) 3; d) 7; e) 6; f) 5.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Calculăm succesiv valorile factorialelor $n!$ $(n > 0)$ care au valori inferioare sau egale cu 120 şi folosim faptul că funcţia factorial este strict crescătoare pentru $n \geq 1$. Obţinem succesiv: $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; observăm că $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 > 120$, deci valorile acceptabile pentru $n \geq 1$ sunt $1, 2, 3, 4, 5$, raspuns corect 5. ***Metoda 2.*** Pentru calculul factorialelor folosind formula $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$, rezultă: $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 6 \cdot 4 = 24$, $5! = 24 \cdot 5 = 120$; $6! = 120 \cdot 6 = 720$. În continuare se procedează ca la metoda 1.

2. Soluţia ecuaţiei $5x - 12 = 3x$ este: **(5 pct.)**

   a) 4; b) 5; c) -5; d) 6; e) 3; f) -3.

   Soluţie. $5x - 12 = 3x \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow x = 6$.

3. Suma soluţiilor ecuaţiei $x^2 - 4x + 3 = 0$ este: **(5 pct.)**

   a) -3; b) 4; c) -2; d) 5; e) 7; f) 2.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Rezolvăm ecuaţia: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{\frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}\} = \{\frac{4 \pm 2}{2}\} \Leftrightarrow x \in \{1, 3\}$, deci suma rădăcinilor este $3 + 1 = 4$. ***Metoda 2.*** Folosind prima relaţie Viéte, avem suma celor două rădăcini, $x_1 + x_2 = -\frac{-4}{1} = 4$.

4. Modulul numărului complex $4 + 3i$ este: **(5 pct.)**

   a) 3; b) 5; c) 4; d) $\sqrt{7}$; e) 1; f) 2.

   Soluţie. Folosind formula $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$, obţinem $|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

5. Soluţia ecuaţiei $3^{x-1} = 9$ este: **(5 pct.)**

   a) 3; b) 4; c) 5; d) 0; e) 2; f) 1.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie: $3^{x-1} = 9 \Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^2$. Aplicând funcţia logaritm în baza 3 (inversa funcţiei exponenţiale de bază 3) ambilor termeni ai egalităţii, obţinem: $x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

6. Soluţia ecuaţiei $\sqrt{3x + 4} = 2$ este: **(5 pct.)**

   a) $x = 3$; b) $x = 1$; c) $x = 0$; d) $x = 2$; e) $x = 4$; f) $x = -1$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului este $3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{4}{3}$. Ridicând ecuaţia la pătrat, obţinem $3x + 4 = 4 \Leftrightarrow x = 0$ (care satisface atât condiţia de existenţă, cât şi ecuaţia dată).

7. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^3 - 9x = 0$ este: **(5 pct.)**

   a) $\{-4, 1\}$; b) $\{-2, 0, 2\}$; c) $\{4, 1\}$; d) $\{-3, 0, 3\}$; e) $\{-3, 3\}$; f) $\{-1, 0, 1\}$.

   Soluţie. Dând factor comun x şi folosind formula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, rezolvăm ecuaţia: $x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x(x + 3)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3, 0, 3\}$.

8. Să se rezolve ecuaţia: $\log_3 x = 1$. **(5 pct.)**

   a) $x = 9$; b) $x = 17$; c) $x = 3$; d) $x = 14$; e) $x = 11$; f) $x = 13$.

   Soluţie. Aplicăm ambilor membri ai ecuaţiei funcţia exponenţială de bază 3 (inversa funcţiei logaritmice de bază 3) şi obţinem $x = 3^1$, deci $x = 3$.

9. Ordonaţi crescător numerele π, 3, $\sqrt{5}$. **(5 pct.)**

   a) π, 3, $\sqrt{5}$; b) 3, π, $\sqrt{5}$; c) $\sqrt{5}$, 3, π; d) $\sqrt{5}$, π, 3; e) π, $\sqrt{5}$, 3; f) 3, $\sqrt{5}$, π.

   Soluţie. Avem $\pi = 3,14\ldots$, deci $3 < \pi$. De asemenea, $500 < 529 = 23^2$ implică, împărţind prin 100 şi extrăgând radical din termenii inegalităţii (folosind faptul că funcţia radical este strict crescătoare), $\sqrt{5} < 2,3$; atunci $\sqrt{\mathbf{5}} < 2,3 < \mathbf{3} < \pi$ şi deci $\sqrt{5} < 3 < \pi$.

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+e^x$. Să se calculeze $f'(1)$. **(5 pct.)**

a) $2+e$; b) $1+e$; c) $3+e$; d) e; e) $e-1$; f) $2e$.

Soluţie. $f'(x)=2x+e^x$, deci $f'(1)=2+e$.

11. Fie polinomul $f=(2X^2-1)^2$. Să se calculeze $f(1)$. **(5 pct.)**

a) 3; b) 1; c) -1; d) 0; e) 2; f) -2.

Soluţie. Prin înlocuirea lui x cu 1 în expresia funcţiei polinomiale asociate $f(x)=(2x^2-1)^2$, rezultă $f(1)=(2\cdot 1^2-1)^2=1$.

12. Al 5-lea termen al progresiei aritmetice $1,4,7,\ldots$ este: **(5 pct.)**

a) 13; b) 15; c) 10; d) 12; e) 11; f) 16.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Notând termenii progresiei cu $a_1,a_2,\ldots$, raţia progresiei aritmetice este $r=a_2-a_1=4-1=3$ deci, folosind formula $a_n=a_1+(n-1)r$ pentru $n\geq 1$, rezultă $a_5=1+(5-1)\cdot 3=13$. ***Metoda 2.*** Folosind proprietatea $a_m=\frac{a_{m-p}+a_{m+p}}{2}$, $\forall m\geq 2, p\geq 1, m>p$, rezultă $\frac{a_1+a_5}{2}=a_3\Leftrightarrow a_5=2a_3-a_1=2\cdot 7-1=13$.

13. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x+5y=3\\ x-5y=0.\end{cases}$ **(5 pct.)**

a) $x=2,\ y=3$; b) $x=3,\ y=5$; c) $x=-1,\ y=4$; d) $x=4,\ y=-1$; e) $x=4,\ y=2$; f) $x=1,\ y=\frac{1}{5}$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Adunând cele două ecuaţii, rezultă $3x=3\Rightarrow x=1$, şi înlocuind în ecuaţia a doua, obţinem $y=\frac{1}{5}$. Răspuns corect: $x=1,\ y=\frac{1}{5}$. ***Metoda 2.*** Sistemul este compatibil determinat de tip Cramer, deoarece numărul de ecuaţii coincide cu cel al necunoscutelor şi $\Delta=\left|\begin{smallmatrix}2&5\\1&-5\end{smallmatrix}\right|=-15\neq 0$. Atunci, aplicând regula lui Cramer, se obţine soluţia unică a sistemului:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{1}{-15}\begin{vmatrix}3&5\\0&-5\end{vmatrix}=\frac{-15}{-15}=1\qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{1}{-15}\begin{vmatrix}2&3\\1&0\end{vmatrix}=\frac{-3}{-15}=\frac{1}{5},$$

deci răspuns corect: $x=1,\ y=\frac{1}{5}$.

14. Să se calculeze determinantul $D=\left|\begin{smallmatrix}2&3&1\\0&7&0\\2&3&1\end{smallmatrix}\right|$. **(5 pct.)**

a) $D=11$; b) $D=0$; c) $D=15$; d) $D=-5$; e) $D=7$; f) $D=-4$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Calculăm determinantul cu regula lui Sarrus: $D=(14+0+0)-(14+0+0)=0$. ***Metoda 2.*** Dezvoltăm determinantul după linia a doua: $D=(-1)^{2+2}\left|\begin{smallmatrix}2&1\\2&1\end{smallmatrix}\right|=0$. ***Metoda 3.*** Determinantul are liniile 1 şi 3 egale, deci este nul ($D=0$). ***Metoda 4.*** Determinantul are coloanele 1 şi 3 prporţionale, deci este nul ($D=0$).

15. Dacă $x\leq 3-2x$, atunci: **(5 pct.)**

a) $x\leq 1$; b) $x\geq 0$; c) $x\leq -5$; d) $x\leq 0$; e) $x\geq 15$; f) $x\leq -11$.

Soluţie. $x\leq 3-2x\Leftrightarrow 3x\leq 3\Leftrightarrow x\leq 1$.

16. Fie $A=\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\2&1\end{smallmatrix}\right)$. Să se calculeze A^2. **(5 pct.)**

a) $\left(\begin{smallmatrix}4&5\\5&4\end{smallmatrix}\right)$; b) $\left(\begin{smallmatrix}5&-4\\4&5\end{smallmatrix}\right)$; c) $\left(\begin{smallmatrix}3&-4\\4&3\end{smallmatrix}\right)$; d) $\left(\begin{smallmatrix}-3&4\\4&3\end{smallmatrix}\right)$; e) $\left(\begin{smallmatrix}-3&-4\\4&-3\end{smallmatrix}\right)$; f) $\left(\begin{smallmatrix}-3&4\\-4&5\end{smallmatrix}\right)$.

Soluţie. $A^2=\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\2&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&-2\\2&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1-4&-2-2\\2+2&-4+1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-3&-4\\4&-3\end{smallmatrix}\right)$.

17. Să se calculeze punctul de extrem al funcţiei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$. **(5 pct.)**

a) $x=\frac{1}{4}$; b) $x=3$; c) $x=1$; d) $x=4$; e) $x=\frac{1}{2}$; f) $x=2$.

Soluţie. Prin derivare, obţinem $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$, deci $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow x=1\in(0,\infty)$. Dar $f'(x)<0$ (f descrescătoare) pentru $x\in(0,1)$ şi $f'(x)>0$ (f descrescătoare) pentru $x\in(1,\infty)$, deci $x=1$ este punct de minim pentru funcţia f.

18. Să se calculeze $\int_0^1(x+e^x)dx$. **(5 pct.)**

a) $e-\frac{1}{2}$; b) $3e$; c) $e+\frac{1}{2}$; d) $2e$; e) $2+3e$; f) $\frac{1}{2}$.

Soluţie. Aplicând formula Leibnitz-Newton, obţinem $\int_0^4(x+e^x)dx=\left.\frac{x^2}{2}+e^x\right|_0^1=(\frac{1^2}{2}+e)-(\frac{0^2}{2}+e^0)=e-\frac{1}{2}$.