Universitatea Politehnica din Bucureşti 2013
Disciplina: Geometrie şi Trigonometrie
Varianta A

1. Aflaţi $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\bar{u} = m\bar{i} + 2\bar{j}$ şi $\bar{v} = 2\bar{i} + 4\bar{j}$ să fie coliniari. **(5 pct.)**

   a) $m = \frac{5}{4}$; b) $m = 0$; c) $m = \frac{3}{2}$; d) $m = 1$; e) $m = 3$; f) $m = -1$.

   Soluţie. Coeficienţii celor doi vectori trebuie să fie proporţionali, deci $\dfrac{m}{2} = \dfrac{2}{4} \Leftrightarrow m = 1$.

2. Un triunghi isoscel are unghiurile egale de mărime $\frac{\pi}{8}$ şi laturile egale de lungime 1. Atunci înălţimea corespunzătoare uneia dintre laturile egale este de lungime: **(5 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 1; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Soluţie. Notăm cu $\ell = 1$ lungimea comună a laturilor egale; fie $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ unghiurile egale ale triunghiului isoscel. Folosind formula de arie $S = \frac{ab\sin\hat{C}}{2}$ pentru $a = b = \ell$ şi unghiul $\hat{C} = \pi - (\hat{A} + \hat{B}) = \pi - 2\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$, rezultă aria triunghiului,

$$S = \frac{\ell^2 \sin\dfrac{3\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

   deci lungimea h a înălţimii corespunzătoare uneia dintre laturile egale satisface relaţia $\frac{hl}{2} = S$, deci $h = \frac{2S}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Numărul soluţiilor ecuaţiei $\sin x = \frac{1}{2}$ din intervalul $[0, 2\pi]$, care verifică inegalitatea $\cos x < 0$ este: **(5 pct.)**

   a) 4; b) 1; c) 5; d) 2; e) 0; f) 3.

   Soluţie. Soluţiile ecuaţiei $\sin x = \frac{1}{2}$ din intervalul $[0, 2\pi]$ sunt $\frac{\pi}{6}$ şi $\frac{5\pi}{6}$. Dar $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ iar $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. Convine deci doar a doua soluţie $\frac{5\pi}{6}$, iar numărul soluţiilor care satisfac condiţia este 1.

4. Se dau vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{v}$. Aflaţi produsul scalar al celor doi vectori ştiind că $\|\bar{u}\| = 2$, $\|\bar{v}\| = 3$ şi unghiul format de cei doi vectori este $\frac{\pi}{2}$. **(5 pct.)**

   a) 2; b) -2; c) -1; d) 0; e) 1; f) 4.

   Soluţie. Produsul scalar cerut are expresia

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = ||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}|| \cdot \cos\widehat{(\bar{u}, \bar{v})} = 2 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 3 \cdot 0 = 0.$$

5. Distanţa dintre punctele $A(2, 0)$ şi $B(1, 3)$ este: **(5 pct.)**

   a) $\sqrt{11}$; b) $\sqrt{5}$; c) 2; d) $\sqrt{10}$; e) 3; f) $\sqrt{7}$.

   Soluţie. Distanţa cerută este $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

6. Calculaţi expresia $E = \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\text{tg} 45^\circ}$. **(5 pct.)**

   a) $E = 0$; b) $E = \frac{\sqrt{3}}{4}$; c) $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $E = -1$; e) $E = \frac{1}{\sqrt{3}}$; f) $E = \frac{1}{2}$.

   Soluţie. Obţinem $E = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

7. Se dă triunghiul ABC în care $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 75^\circ$ şi $AB = 2$. Atunci raza R a cercului circumscris triunghiului este: **(5 pct.)**

   a) $R = 2\sqrt{2}$; b) $R = 3\sqrt{2}$; c) $R = 4$; d) $R = 2$; e) $R = 1$; f) $R = \sqrt{2}$.

   Soluţie. Calculăm al treilea unghi, $\hat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$. Fie R raza cercului circumscris triunghiului. Atunci, aplicând teorema sinusului, obţinem:

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2}/2} \Leftrightarrow R = \sqrt{2}.$$

8. Aflaţi $\sin x$ ştiind că $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ şi $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **(5 pct.)**

a) -1; b) 2; c) 1; d) 0; e) $\frac{\sqrt{5}}{4}$; f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluţie. Folosind formula trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, rezultă $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, deci $\sin x \in \{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\}$. Dar $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ impune condiţia $\sin x > 0$ şi deci $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Se dau vectorii $\bar{u} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j}$, $\bar{w} = 2\bar{i} + 2\bar{j}$. Aflaţi parametrii reali a şi b astfel încât $a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{w}$. **(5 pct.)**

a) $a = 2$, $b = 0$; b) $a = b = 1$; c) $a = b = -1$; d) $a = 0$, $b = 1$; e) $a = -2$, $b = -1$; f) $a = 1$, $b = -1$.

Soluţie. Egalitatea din enunţ se rescrie

$$a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{w} \Leftrightarrow 2\bar{i} + 2\bar{j} = a(3\bar{i} + 4\bar{j}) + b(\bar{i} + 2\bar{j}) \Leftrightarrow (3a + b)\bar{i} + (4a + 2b)\bar{j} = 2\bar{i} + 2\bar{j}.$$

Din unicitatea descompunerii unui vector după baza $\{\bar{i}, \bar{j}\}$, identificând coeficienţii vectorilor $\bar{i}, \bar{j}$, obţinem sistemul liniar $\begin{cases} 3a + b = 2 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases}$ în necunoscutele $a, b \in \mathbb{R}$, a cărui soluţie unică este $a = 1$, $b = -1$. *Altă soluţie.* Se observă cu ochiul liber că $\bar{u} - \bar{v} = \bar{w}$, deci $\bar{w} = 1 \cdot \bar{u} + (-1) \cdot \bar{v}$. Coeficienţii vectorilor $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ nu sunt poporţionali ($\frac{3}{1} \neq \frac{4}{2}$), deci aceşti doi vectori sunt liniar independenţi. Prin urmare, descompunerea semnalată este unică, iar deci cei doi coeficienţi ai descompunerii ($1 = a$ şi $-1 = b$) sunt singurele valori care satisfac condiţia din enunţ.

10. Fie M mulţimea soluţiilor ecuaţiei $1 + \cos x - \sin^2 x = 0$, care aparţin intervalului $[0, \frac{\pi}{2}]$. Atunci: **(5 pct.)**

a) $M = \{0\}$; b) $M = \{\frac{\pi}{2}\}$; c) $M = \{\frac{3\pi}{4}\}$; d) $M = \{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\}$; e) $M = \{\frac{\pi}{6}\}$; f) $M = \{\frac{\pi}{3}\}$.

Soluţie. Folosind formula trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ecuaţia se rescrie

$$\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x \in \{-1, 0\}.$$

Varianta $\cos x = -1$ nu are soluţii în intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$, pe când varianta $\cos x = 0$ admite soluţia care aparţine acestui interval $x = \frac{\pi}{2}$. Prin urmare $M = \{\frac{\pi}{2}\}$.

11. Dacă $m = \sin 105° + \sin 75°$, atunci: **(5 pct.)**

a) $m = 1$; b) $m = -2$; c) $m = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$; d) $m = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; e) $m = \frac{\sqrt{6}}{2}$; f) $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluţie. Folosim formula $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, pentru cei doi termeni ai sumei m. Obţinem

$$\begin{aligned} m &= \sin(60° + 45°) + \sin(30° + 45°) = \sin 60° \cos 45° + \sin 45° \cos 60° + \sin 30° \cos 45° + \sin 45° \cos 30° \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Altă soluţie. Folosim formula $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ pentru $\alpha = 105°$ şi $\beta = 75°$. Obţinem $m = 2\sin 90° \cdot \cos 15°$. Folosind formula $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ pentru $\alpha = 30°$, rezultă $\cos^2 15° = \frac{1+\cos 30°}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. Dar $\cos 15° > 0$, deci $\cos 15° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$. Aplicăm formula $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$ ($c = \sqrt{a^2 - b}$), varianta cu plus, pentru $a = 2, b = 3$ şi obţinem $c = \sqrt{2^2 - 3} = 1$ şi $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$. Deci $\cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$, iar $m = 2\cos 15° = 2\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

12. Calculaţi cateta unui triunghi dreptunghic isoscel a cărui arie este 18. **(5 pct.)**

a) 4; b) 2; c) $4\sqrt{2}$; d) 6; e) $2\sqrt{2}$; f) 1.

Soluţie. Notând cu c lungimea celor două catete egale ale unui triunghiului dreptunghic isoscel şi cu S aria acestuia, are loc relaţia $S = \frac{c^2}{2}$. Înlocuind aria dată, obţinem $18 = \frac{c^2}{2} \Rightarrow c = 6$. *Altă rezolvare.* Două triunghiuri identice cu cel din enunţ, "lipite" de-a lungul ipotenuzei lor formează un pătrat de latură c şi arie $2 \cdot 18 = 36$. Deci cateta triunghiului privită ca latură a pătratului este de lungime $c = \sqrt{36} = 6$.

13. Fie $A(2, 1)$, $B(0, 3)$ şi $C(3, 4)$. Atunci aria triunghiului ABC este: **(5 pct.)**

a) $\sqrt{2}$; b) 8; c) $2\sqrt{2}$; d) 1; e) 4; f) 2.

Soluţie. Notând cu S aria triunghiului ABC, putem folosi formula cu determinant,

$$S = \frac{1}{2}\text{abs}\left(\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\text{abs}\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\text{abs}\,(-8) = 4.$$

14. Aflaţi valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(1, m)$ aparţine dreptei de ecuaţie $2x + y = 1$. **(5 pct.)**

a) $m = -1$; b) $m = \frac{1}{2}$; c) $m = -2$; d) $m = 0$; e) $m = \frac{3}{2}$; f) $m = 1$.

Soluţie. Înlocuind coordonatele punctului A în ecuaţie, obţinem $2 \cdot 1 + m = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

15. Distanţa de la punctul $A(1, 2)$ la dreapta de ecuaţie $x - y - 2 = 0$ este: **(5 pct.)**

a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\sqrt{3}$; f) $\frac{7}{2}$.

Soluţie. Folosim formula distanţei d de la punctul $A(x_A, y_A)$ la dreapta de ecuaţie $ax + by + c = 0$,

$$d = \frac{|a \cdot x_A + b \cdot y_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Altă soluţie. Distanţa cerută este cea dintre A şi proiecţia B a lui A pe dreapta dată. Aflăm B intersectând dreapta dată $y = x - 2$ a cărei pantă este $m = 1$ cu dreapta ce trece prin A de pantă $-\frac{1}{m} = -1$ şi care are deci ecuaţia $y - 2 = (-1) \cdot (x - 1)$. Sistemul celor două ecuaţii are drept soluţie coordonatele punctului B:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y - 2 = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5 \\ 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

deci distanţa cerută este $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(\frac{5}{2} - 1)^2 + (\frac{1}{2} - 2)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

16. Să se determine valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuaţie $mx + 2y + 4 = 0$ să fie paralelă cu dreapta $9x + 6y - 1 = 0$. **(5 pct.)**

a) $m = 1$; b) $m = 3$; c) $m = -\frac{3}{2}$; d) $m = \frac{3}{4}$; e) $m = 4$; f) $m = -1$.

Soluţie. Dreptele sunt paralele d.n.d. rapoartele coeficienţilor corespunzători sunt egale, dar diferite de raportul termenilor liberi. Această condiţie se scrie în cazul nostru $\frac{m}{9} = \frac{2}{6} \neq \frac{4}{-1}$, în care ultima inegalitate este satisfăcută, iar egalitatea din stânga conduce la $m = \frac{2 \cdot 9}{6} = 3$, deci $m = 3$.

17. Aflaţi simetricul B al punctului $A(1, 2)$ faţă de dreapta de ecuaţie $x - y = 0$. **(5 pct.)**

a) $B(-1, -5)$; b) $B(3, 4)$; c) $B(2, 1)$; d) $B(1, 0)$; e) $B(2, 2)$; f) $B(0, 1)$.

Soluţie. Fie $B(a, b)$ simetricul căutat. Cerem ca mijlocul $M(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2})$ al segmentului AB să se afle pe dreapta dată şi panta $m = 1$ a dreptei date $y = x$ şi panta $m' = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{b-2}{a-1}$ a dreptei AB să verifice condiţia de ortogonalitate $m \cdot m' = -1$. Cele două condiţii au forma

$$\begin{cases} \frac{a+1}{2} - \frac{b+2}{2} = 0 \\ \frac{b-2}{a-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1, \end{cases}$$

deci punctul căutat este $B(2, 1)$. *Altă soluţie.* Aflăm în prealabil proiecţia $C(u, v)$ a punctului A pe dreaptă, intersectând dreapta dată, cu dreapta care trece prin A de pantă $-\frac{1}{m}$, unde $m = 1$ este panta dreptei date şi care are deci ecuaţia $y - y_A = -\frac{1}{m}(x - x_A \Leftrightarrow y - 2 = (-1)(x - 1)$. Obţinem sistemul ale cărui soluţii sunt coordonatele punctului C, $\begin{cases} x - y = 0 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{3}{2}$, deci $C(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Dar C este mijlocul segmentului AB, deci satisface condiţiile $x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$, care se rescriu $x_B = 2x_C - x_A = 3 - 1 = 2$, $y_B = 2y_C - y_A = 3 - 2 = 1$. Prin urmare avem $B(2, 1)$.

18. Se consideră triunghiul ABC cu laturile $AC = 5$, $BC = 10$ şi $\hat{C} = 60°$. Atunci mărimea laturii AB este: **(5 pct.)**

a) $5\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{3}$; c) $\sqrt{3}$; d) 5; e) $2\sqrt{3}$; f) $4\sqrt{3}$.

Soluţie. Aplicăm teorema cosinusului, obţinem

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\hat{C} = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 125 - 100 \cdot \frac{1}{2} = 75,$$

deci $AB = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. *Altă soluţie.* Notând cu M millocul laturii BC, se observă că $CM = CA$ (deci ACM triunghi isoscel), iar unghiul din care pleacă laturile egale este $\hat{C} = 60°$. Celelalte două unghiuri egale rezultă tot de $60°$, deci ACM triunghi echilateral. Atunci avem $AM = AC = AB$, deci în cercul de centru M şi rază AM, unghiul A subântinde un arc capabil de $180°$, deci este unghi drept. Prin urmare ABC este triunghi dreptunghic cu $\hat{A} = 90°$, şi din teorema lui Pitagora rezultă $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.