1. Să se calculeze determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **(5 pct.)**

   a) $D = 5$; b) $D = 4$; c) $D = 2$; d) $D = 1$; e) $D = 0$; f) $D = 3$.

   Soluţie. Aplicând regula lui Sarrus, obţinem $D = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 4\cdot 8\cdot 3 - 7\cdot 5\cdot 3 - 4\cdot 2\cdot 9 - 6\cdot 8\cdot 1 = 0$.

   Altfel. Scăzând prima linie a determinantului din liniile a doua şi a treia, rezultă $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$.

   Ultimele două linii fiind proporţionale, rezultă $D = 0$.

2. Să se calculeze $I = \int_0^1 (x^2 - x)dx$. **(5 pct.)**

   a) $I = \frac{2}{3}$; b) $I = 0$; c) $I = \frac{1}{2}$; d) $I = -\frac{1}{6}$; e) $I = 2$; f) $I = 6$.

   Soluţie. Aplicând formula Leibnitz-Newton, integrala se rescrie $I = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$.

3. Fie numărul complex $z = 1 + 2i$. Atunci: **(5 pct.)**

   a) $|z| = 0$; b) $|z| = \sqrt{5}$; c) $|z| = \sqrt{7}$; d) $|z| = 6$; e) $|z| = 4$; f) $|z| = -1$.

   Soluţie. Obţinem $|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

4. Suma soluţiilor ecuaţiei $x^2 - x - 2 = 0$ este: **(5 pct.)**

   a) 1; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) 3; e) 0; f) 5.

   Soluţie. Folosind relaţiile lui Viete, rezultă că suma celor două rădăcini este $x_1 + x_2 = -\frac{-1}{1} = 1$. *Altfel.* Rezolvăm ecuaţia de gradul doi:

   $$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1 \pm 3}{2}\right\},$$

   deci $x \in \{2, -1\}$ iar suma celor două rădăcini este $x_1 + x_2 = 2 + (-1) = 1$.

5. Calculaţi $E = C_5^2 + C_5^3$. **(5 pct.)**

   a) $E = 20$; b) $E = 10$; c) $E = 2$; d) $E = -5$; e) $E = 0$; f) $E = 15$.

   Soluţie. Aplicând formula combinărilor, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, rezultă

   $$E = C_5^3 + C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{6\cdot 2} + \frac{120}{2\cdot 6} = 10 + 10 = 20.$$

   Altfel. Aplicăm formula combinărilor, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ şi egalitatea $C_n^k = C_n^{n-k}$. Obţinem

   $$E = C_5^3 + C_5^2 = C_5^3 + C_5^{5-2} = C_5^3 + C_5^3 = 2C_5^3 = 2\frac{5!}{3!2!} = 2\frac{120}{6\cdot 2} = 2\cdot 10 = 20.$$

6. Soluţia reală a ecuaţiei $\frac{2}{3}x - \frac{x-1}{2} = x$ este: **(5 pct.)**

   a) -1; b) 0; c) $-\frac{1}{11}$; d) 1; e) $\frac{2}{7}$; f) $\frac{3}{5}$.

   Soluţie. Obţinem succesiv $\frac{2}{3}x - \frac{x-1}{2} = x \Leftrightarrow 4x - 3 + 3 = 6x \Leftrightarrow 5x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$.

7. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 4. \end{cases}$ **(5 pct.)**

   a) $x = 4, y = 0$; b) $x = 5, y = -4$; c) $x = 0, y = -1$;
   d) $x = -1, y = 3$; e) $x = -2, y = -2$; f) $x = 2, y = 1$.

   Soluţie. Din prima ecuaţie rezultă $y = x + 1$; înlocuind în a doua ecuaţie, obţinem $3y = 3$, deci $y = 1$ şi $x = 2$.

8. Fie matricele: $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}$. Să se determine matricea $C=AB-BA$. **(5 pct.)**

a) $C=\begin{pmatrix}-1&3\\2&4\end{pmatrix}$; b) $C=\begin{pmatrix}-5&1\\-9&5\end{pmatrix}$; c) $C=\begin{pmatrix}-7&-5\\0&1\end{pmatrix}$; d) $C=\begin{pmatrix}0&1\\4&5\end{pmatrix}$; e) $C=\begin{pmatrix}1&6\\-4&3\end{pmatrix}$; f) $C=\begin{pmatrix}2&7\\9&-2\end{pmatrix}$.

Soluţie. Prin calcul direct, obţinem $AB-BA=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&5\\-4&11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&1\\-9&5\end{pmatrix}$.

9. Ecuaţia $\sqrt{x-1}+x=7$ are soluţia: **(5 pct.)**

a) $x=0$; b) $x=-1$; c) $x=1$; d) $x=5$; e) $x=2$; f) $x=6$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie $\sqrt{x-1}+x=7\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=7-x$. Condiţia de existenţă a radicalului este $x\geq 1$. Se observă că în egalitate membrul drept trebuie să fie pozitiv, deci $7-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 7$. Prin urmare ecuaţia conduce la condiţia $x\in[1,7]$. Ridicând la pătrat ambii membri obţinem ecuaţia $x^2-15x+50=0$, de unde $x_1=5$ şi $x_2=10$. Se observă că $x_2\notin[1,7]$, deci nu este soluţie. De asemenea, se observă că această valoare nu satisface ecuaţia iniţială. Înlocuind $x_1=5$ în ecuaţia iniţială obţinem o identitate, deci singura soluţie a ecuaţiei este $x=5$.

10. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+1}=8$. **(5 pct.)**

a) $x=2$; b) $x=5$; c) $x=3$; d) $x=4$; e) $x=-3$; f) $x=0$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie $2^{x+1}=8\Leftrightarrow 2^{x+1}=2^3$. Prin logaritmare în baza 2, obţinem $x+1=3\Leftrightarrow x=2$.

11. Fie polinomul $f=X^3-3X^2+2X$. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f, atunci $E=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ este egală cu: **(5 pct.)**

a) -2; b) 5; c) -4; d) 4; e) 2; f) 7.

Soluţie. Ţinând cont de relaţiile Viete, rezultă

$$E=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=3^2-2\cdot 2=9-4=5.$$

12. Fie $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=x^3-3x$. Atunci $h'(1)$ este: **(5 pct.)**

a) $\frac{3}{4}$; b) 0; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{2}{3}$; e) -4; f) $-\frac{2}{3}$.

Soluţie. Derivata funcţiei h este $h'(x)=3x^2-3$ şi deci $h'(1)=0$.

13. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $|x-1|=3$ este: **(5 pct.)**

a) $\{5\}$; b) $\{5,7\}$; c) $\{3\}$; d) $\varnothing$; e) $\{0,1\}$; f) $\{-2,4\}$.

Soluţie. Ecuaţia se rescrie $|x-1|=3\Leftrightarrow x-1=\pm 3$. Rezultă $x\in\{-2,4\}$.

14. Fie funcţia $f(x)=\begin{cases}2x^2+x+2, & x<0\\ x+m, & x\geq 0\end{cases}$. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care funcţia f este continuă. **(5 pct.)**

a) $m=5$; b) $m=7$; c) $m=4$; d) $m=2$; e) $m=11$; f) $m=1$.

Soluţie. Limitele laterale ale funcţiei f în 0 sunt $\ell_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}f(x)=2$, $\ell_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}f(x)=m$, şi avem $f(0)=m$. Funcţia f este continuă în 0 dacă $\ell_s(0)=\ell_d(0)=f(0)$, de unde $m=2$.

15. Fie $E=\sqrt{4}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[4]{16}$. Atunci: **(5 pct.)**

a) $E=1$; b) $E=12$; c) $E=7$; d) $E=6$; e) $E=3$; f) $E=28$.

Soluţie. $E=2+2+2=6$.

16. Mulţimea valorilor lui $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $2\ln|x|=mx^2+1$ are două soluţii reale distincte este: **(5 pct.)**

a) $m\in(-\infty,0]\cup\{\frac{1}{e^2}\}$; b) $m\in(-\infty,\frac{1}{e^2}]$; c) $m\in[\frac{1}{e^2},+\infty)$;

d) $m\in\{\frac{1}{e^2}\}\cup(1,e]$; e) $m\in(-\infty,-\frac{1}{e^2}]\cup[\frac{1}{e^2},1]$; f) $m\in(-\infty,1)$.

Soluţie. Existenţa logaritmului conduce la condiţia $|x|>0\Leftrightarrow x\neq 0$. Obţinem $2\ln|x|=mx^2+1\Leftrightarrow\frac{2\ln|x|-1}{x^2}=m$. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2\ln|x|-1}{x^2}$. Atunci, ecuaţia $2\ln|x|=mx^2+1$ are două soluţii reale distincte $\Leftrightarrow$ ecuaţia $f(x)=m$ are două soluţii reale distincte. Avem $f'(x)=\frac{4(1-\ln|x|)}{x^3}$. Tabelul de variaţie al funcţiei f este

x	$-\infty$		$-e$		0		e		∞
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-\vert+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	$-\infty\vert+\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0

Din tabelul de variaţie al funcţiei deducem că ecuaţia are două rădăcini reale distincte doar dacă $m \in (-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{e^2}\}$.

17. Fie funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2} dt$. Atunci: **(5 pct.)**

a) g are două puncte de extrem; b) g este descrescătoare; c) g este crescătoare;

d) g este convexă; e) $g'(0) = 7$; f) g este concavă.

Soluţie. Avem $g'(x) = e^{(x^2)^2} \cdot 2x = 2x\, e^{x^4}$ şi $g''(x) = e^{x^4}(2 + 2x \cdot 4x^3) = 2e^{x^4}(4x^4 + 1) > 0$, deci g este funcţie convexă.

18. Pentru $m \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ se defineşte legea de compoziţie:

$$z_1 * z_2 = mz_1z_2 - im(z_1 + z_2) - m + i, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Să se calculeze suma modulelor valorilor lui m pentru care simetricul elementului $1+i$ este $2+i$. **(5 pct.)**

a) $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{5}$; d) 2; e) 1; f) 4.

Soluţie. Condiţia care defineşte elementul neutru al legii de compoziţie este

$$\begin{aligned} z * e = z, \forall z \in \mathbb{C} \quad &\Leftrightarrow mez - im(e + z) - m + i = z, \forall z \in \mathbb{C} \\ &\Leftrightarrow z(me - mi - 1) + (i - m - ime) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} me - mi - 1 = 0 \\ i - m - ime = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Se observă că înmulţind prima ecuaţie cu $-i$, se obţine a doua ecuaţie. Prima ecuaţie conduce la elementul neutru, $e = \frac{im+1}{m}$. Simetricul elementului $1 + i$ este $2 + i$ doar dacă avem condiţiile echivalente

$$\begin{aligned} (1 + i) * (2 + i) = e \quad &\Leftrightarrow m(1 + i)(2 + i) - im(1 + i + 2 + i) - m - i = \tfrac{im+1}{m} \\ &\Leftrightarrow 2m + i \quad = \tfrac{im+1}{m} \Leftrightarrow 2m^2 = 1 \Leftrightarrow m^2 = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Deci $m_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, de unde $|m_1| + |m_2| = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.