1. Se consideră triunghiul ABC cu laturile $BC = 2$, $AB = \sqrt{2}$, $AC = 1+\sqrt{3}$. Să se calculeze $\cos\hat{A}$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 0; d) $\sqrt{3}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) 1.

   Soluţie. Din teorema cosinusului aplicată pentru unghiul $\hat{A}$, avem $BC^2 = AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\hat{A}$, deci $\cos\hat{A} = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$. Prin urmare

   $$\cos\hat{A} = \frac{2+(1+\sqrt{3})^2-4}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. Dacă $z = 2+i$ atunci $z+\bar{z}$ este: **(5 pct.)**

   a) 3; b) 6; c) $1+i$; d) 5; e) $7i$; f) 4.

   Soluţie. Obţinem $z+\bar{z} = (2+i)+(2-i) = 4$.

3. Se dau vectorii $\vec{u} = 3\vec{i}+(\lambda-4)\vec{j}$ şi $\vec{v} = \lambda\vec{i}+\vec{j}$. Să se determine $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie perpendiculari. **(5 pct.)**

   a) $\lambda=-1$; b) $\lambda=2$; c) $\lambda=1$; d) $\lambda=\frac{1}{2}$; e) $\lambda=-\frac{3}{2}$; f) $\lambda=0$.

   Soluţie. Avem $\bar{u}\perp\bar{v} \Leftrightarrow \bar{u}\cdot\bar{v}=0 \Leftrightarrow 3\lambda+(\lambda-4)\cdot 1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$.

4. Soluţia ecuaţiei $2\sin x-1=0$, $x\in\left[0.\frac{\pi}{2}\right]$ este: **(5 pct.)**

   a) $\frac{\pi}{10}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{2\pi}{5}$; d) 0; e) $\frac{\pi}{7}$; f) $\frac{\pi}{4}$.

   Soluţie. Din $2\sin x=1$ rezultă $\sin x=\dfrac{1}{2}$. Deoarece $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, obţinem $x=\dfrac{\pi}{6}$.

5. Fie $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$, unde $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}$. Atunci $||\vec{w}||$ este: **(5 pct.)**

   a) 6; b) 2; c) 0; d) 7; e) $\sqrt{5}$; f) -2.

   Soluţie. Prin calcul direct, rezultă $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}=2(2\vec{i}+3\vec{j})+3(\vec{i}-2\vec{j})=7\vec{i}$. Deci $||\vec{w}||=||7\vec{i}||=|7|\,||\vec{i}||=7\cdot 1=7$.

6. Să se calculeze produsul $P=\sin 30^\circ\cdot\ \mathrm{tg}\,45^\circ\cdot\cos 60^\circ$. **(5 pct.)**

   a) 2; b) 0; c) $\sqrt{3}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{1}{4}$; f) 1.

   Soluţie. Înlocuind în expresie valorile funcţiilor trigonometrice, rezultă $P=\sin 30^\circ\ \mathrm{tg}\,45^\circ\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$.

7. Dacă $\cos x=\frac{3}{5}$, atunci $\sin^2 x$ este: **(5 pct.)**

   a) 0; b) 1; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{2}{5}$; e) $-\frac{16}{25}$; f) $\frac{16}{25}$.

   Soluţie. Deoarece $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, obţinem $\sin^2 x=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}$.

8. Să se scrie ecuaţia dreptei ce trece prin punctele $A(1,2)$, $B(2,1)$. **(5 pct.)**

   a) $x-y+3=0$; b) $x+y-3=0$; c) $2x+3y-5=0$; d) $x=y$; e) $3x+5y=2$; f) $x-4y-5=0$.

   Soluţie. Ecuaţia dreptei este dată de formula $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$, deci $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-2}{1-2}$. Rezultă $-(x-1)=y-2$, deci $x+y-3=0$.

9. Să se calculeze $\mathrm{tg}\,x$ ştiind că $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) -1; c) $\sqrt{2}$; d) 1; e) 2; f) $\sqrt{3}$.

   Soluţie. Din $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$, rezultă $\sin x=\sqrt{3}\cos x$. Dar $\cos x$ este nenul, deoarece anularea lui ar conduce la $\sin x\in\{\pm 1\}$ iar prin înlocuire în ecuaţie la $\sin x=0$, contradicţie. Prin urmare putem împărţi ambii membri ai ecuaţiei la $\cos x\neq 0$. Obţinem $\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{3}$, adică $\mathrm{tg}\,x=\sqrt{3}$.

10. Expresia $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$ este egală cu: **(5 pct.)**

a) 1; b) 3; c) $\sin x$; d) 2; e) -1; f) $\cos x$.

Soluţie. Ridicând la pătrat binomul, folosind formula triginometrică fundamentală şi formula sinusului de arc dublu, rezultă

$$(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sin 2x = 1 + \sin 2x - \sin 2x = 1.$$

11. Într-un triunghi ABC se dau $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 30°$. Atunci $\sin \frac{\hat{A}}{2}$ are valoarea: **(5 pct.)**

a) 0; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) 1.

Soluţie. Deoarece $\hat{B} = 60°$ şi $\hat{C} = 30°$, folosind egalitatea $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180°$, rezultă $\hat{A} = 180° - (\hat{B}+\hat{C}) = 90°$. Deci $\sin \dfrac{\hat{A}}{2} = \sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Pentru $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ calculaţi $|z|$. **(5 pct.)**

a) $\frac{1}{3}$; b) 2; c) $\frac{1}{4}$; d) -1; e) 0; f) 1.

Soluţie. Folosind regula de calcul a modulului unui număr complex scris în formă algebrică, obţinem

$$|z| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1.$$

13. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta $mx + 4y + 2 = 0$ să fie paralelă cu dreapta $3x - 6y + 1 = 0$. **(5 pct.)**

a) $m = \frac{1}{2}$; b) $m = 2$; c) $m = \frac{1}{3}$; d) $m = -2$; e) $m = \frac{2}{3}$; f) $m = 1$.

Soluţie. Fie $d_1 :\ mx + 4y + 2 = 0$ şi $d_2 :\ 3x - 6y + 1 = 0$ dreptele date şi m_1, m_2 respectiv pantele acestora. Condiţia de paralelism se scrie:

$$d_1 || d_2 \Leftrightarrow m_{d_1} = m_{d_2} \Leftrightarrow \frac{-m}{4} = \frac{-3}{-6} \Leftrightarrow \frac{-m}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -2.$$

14. Fie $A(-3,0)$, $B(3,0)$,$C(0,4)$ şi fie S aria triunghiului ABC. Atunci: **(5 pct.)**

a) $S = 15$; b) $S = 6$; c) $S = 16$; d) $S = 8$; e) $S = 12$; f) $S = 20$.

Soluţie. Folosim formula $S = \mathcal{A}_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$. Avem $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 12 = 24$, deci $S = \frac{1}{2} \cdot |24| = 12$.

15. Dacă punctele $A(2,3)$, $B(-1,4)$, $C(m, m+3)$ sunt coliniare, atunci: **(5 pct.)**

a) $m = \frac{1}{3}$; b) $m = \frac{2}{3}$; c) $m = -\frac{1}{3}$; d) $m = -\frac{1}{2}$; e) $m = \frac{1}{2}$; f) $m = 4$.

Soluţie. Punctele A, B, C sunt coliniare dacă $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$. Deci $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ m & m+3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ şi dezvoltând determinantul, obţinem $-4m + 2 = 0$, de unde $m = \dfrac{1}{2}$.

16. Să se precizeze $m \in \mathbb{R}$ astfel încât dreapta de ecuaţie $2x - my + 3 = 0$ să treacă prin punctul $M(1,2)$. **(5 pct.)**

a) $m = \frac{1}{3}$; b) $m = -\frac{3}{4}$; c) $m = \frac{1}{2}$; d) $m = \frac{2}{5}$; e) $m = 0$; f) $m = \frac{5}{2}$.

Soluţie. Deoarece punctul $M(1,2)$ aparţine dreptei $d :\ 2x - my + 3 = 0$, coordonatele acestuia trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei. Înlocuind, obţinem $2 \cdot 1 - m \cdot 2 + 3 = 0$, de unde $m = \dfrac{5}{2}$.

17. Dacă $E = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$, atunci valoarea $a = E^3$ este: **(5 pct.)**

a) $a = -1$; b) $a = 1 + i$; c) $a = 3i$; d) $a = 1$; e) $a = i$; f) $a = -1$.

Soluţie. Notăm $a = E^3 = \left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^3$. Folosind formula lui Moivre, obţinem

$$a = \cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i.$$

18. Să se determine vârful D al paralelogramului $ABCD$, cunoscându-se $A(0,0)$, $B(0,3)$, $C(2,5)$. **(5 pct.)**

a) $D(-1,1)$; b) $D(1,3)$; c) $D(2,2)$; d) $D(-2,2)$; e) $D(3,3)$; f) $D(2,1)$.

Soluţie. Deoarece $ABCD$ este paralelogram, rezultă $AB\,||\,DC$ şi $AB = DC$, adică $\overline{AB} = \overline{DC}$. Dar $\overline{AB} = (x_B - x_A)\overline{i} + (y_B - y_A)\overline{j}$ şi $\overline{DC} = (x_C - x_D)\overline{i} + (y_C - y_D)\overline{j}$, deci

$$\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - 0 = 2 - x_D \\ 3 - 0 = 5 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = 2 \end{cases} \Leftrightarrow D(2,2).$$