1. Să se calculeze $\int_0^1 (x^2+x)dx$. **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{6}$; b) 1; c) $\frac{2}{3}$; d) 2; e) 3; f) $\frac{5}{6}$.

   Soluţie. Prin calcul direct, aplicând formula Leibnitz-Newton, obţinem

   $$\int_0^1 (x^2+x)dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

2. Suma soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{x^2-9} = 4$ este: **(5 pct.)**

   a) 9; b) -1; c) 5; d) 1; e) 0; f) 4.

   Soluţie. Radicalul există pentru $x^2-9 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$. Ridicând la pătrat ambii membri ai ecuaţiei, obţinem $x^2-9=16 \Leftrightarrow x^2=25$, deci $x \in \{\pm 5\} \subset (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$. Prin urmare rădăcinile ecuaţiei sunt -5 şi 5, iar suma lor este 0.

3. Fie $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ Calculaţi A^3. **(5 pct.)**

   a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; b) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; c) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; d) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; e) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$; f) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

   Soluţie. Se observă că $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = I_2$, deci $A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A$, deci $A^3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

4. Să se rezolve ecuaţia $\dfrac{2x+1}{x+2} = 1$. **(5 pct.)**

   a) $x=1$; b) $x=-2$; c) $x=-\frac{1}{2}$; d) $x=2$; e) $x=\sqrt{2}$; f) $x=\sqrt[3]{2}$.

   Soluţie. Se impune condiţia $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. Ecuaţia devine $2x+1 = x+2$, de unde $x=1$.

5. Să se rezolve ecuaţia $3^{x+1} = 3^{4x}$. **(5 pct.)**

   a) 2; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{1}{3}$; d) -1; e) $\frac{2}{3}$; f) 0.

   Soluţie. Din $3^{x+1} = 3^{4x}$ rezultă $x+1=4x$, de unde $x=\frac{1}{3}$.

6. Câte numere naturale x verifică inegalitatea $x < \dfrac{9}{x}$? **(5 pct.)**

   a) şase; b) două; c) patru; d) niciunul; e) unul; f) cinci.

   Soluţie. Avem $x < \frac{9}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x} < 0$. Dar $x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x > 0$, deci inecuaţia este echivalentă cu $x^2-9<0$ şi deci $x \in (-3,3)$. Cum $x \in \mathbb{N}^*$, rezultă $x \in (-3,3) \cap \mathbb{N}^* = \{1,2\}$.

7. Dacă x şi y verifică sistemul $\begin{cases} 2x+y = 2-3m \\ x-y = 1-3m \end{cases}$, atunci $x+2y$ este egal cu: **(5 pct.)**

   a) 1; b) 0; c) $2m+1$; d) $m-1$; e) m; f) 2.

   Soluţie. Scăzând membru cu membru ecuaţia a doua din prima ecuaţie, obţinem $x+2y=1$.

8. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1}$. **(5 pct.)**

   a) nu există limita; b) 2; c) 1; d) 0; e) $\frac{1}{2}$; f) $+\infty$.

   Soluţie. Dând factor forţat x^2 la numitor, simplificând şi apoi trecând la limită, obţinem

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

9. Produsul soluţiilor ecuaţiei $2x^2-5x+2=0$ este: **(5 pct.)**

   a) $-\frac{5}{2}$; b) 0; c) 1; d) $\frac{5}{2}$; e) 4; f) -1.

   Soluţie. Notăm cu $x_{1,2}$ soluţiile ecuaţiei. Din relaţiile Viète, obţinem $x_1x_2 = \frac{2}{2} = 1$.

10. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x^2+3x-e^x$. Să se calculeze $f'(0)$. **(5 pct.)**

a) 3; b) 1; c) e^2; d) $\frac{1}{e}$; e) 0; f) 2.

Soluţie. Avem $f'(x)=3x^2+4x+3-e^x$, deci $f'(0)=3-1=2$.

11. Să se calculeze $(1+i)^2$. **(5 pct.)**

a) $-i$; b) $2i$; c) 3; d) 0; e) i; f) 1.

Soluţie. Prin calcul direct, obţinem $(1+i)^2=1+2i-1=2i$.

12. Să se rezolve inecuaţia $\frac{x}{2}-1<\frac{x}{3}+2$. **(5 pct.)**

a) $x\geq 20$; b) $x>20$; c) $x\leq 18$; d) $x>24$; e) $x=21$; f) $x<18$.

Soluţie. Inecuaţia se rescrie

$$\frac{x}{2}-1<\frac{x}{3}+2\Leftrightarrow\frac{x}{2}-\frac{x}{3}<1+2\Leftrightarrow\frac{x}{6}<3\Leftrightarrow x<18.$$

13. Suma rădăcinilor polinomului X^3-3X^2+2X este: **(5 pct.)**

a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 3; d) 2; e) 0; f) 1.

Soluţie. Dacă x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului, din relaţiile Viète rezultă $x_1+x_2+x_3=-\frac{-3}{1}=3$.

14. Numărul punctelor de extrem ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ este: **(5 pct.)**

a) 4; b) 1; c) 2; d) 3; e) 5; f) 0.

Soluţie. Calculăm derivata, $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, iar ecuaţia $f'(x)=0$ are soluţiile $x\in\{\pm1\}$. Tabloul de variaţie este:

x	$-\infty$		-1		1		∞
$1-x^2$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$ (minim)	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ (maxim)	$\searrow$	$\searrow$

Prin urmare funcţia are *două* puncte de extrem: punctul de minim local $(-1,-\frac{1}{2})$ şi punctul de maxim local $(1,\frac{1}{2})$.

15. Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x=-1$. **(5 pct.)**

a) $x=-\frac{1}{2}$; b) $x=e$; c) $x=1$; d) $x=0$; e) $x=2$; f) $x=\frac{1}{2}$.

Soluţie. Condiţia de existenţa a logaritmului este $x>0$. Avem $\log_2 x=-1\Leftrightarrow x=2^{-1}=\frac{1}{2}$.

16. Să se calculeze limita şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{3^k}$. **(5 pct.)**

a) $\frac{7}{2}$; b) $\frac{9}{4}$; c) 2; d) $\frac{5}{2}$; e) $\frac{7}{3}$; f) 3.

Soluţie. Calculăm în prealabil suma $S=1+2q+3q^2+\ldots+(n+1)q^n$. Avem

$$\begin{aligned}qS-S&=(n+1)q^{n+1}-(1+q+q^2+\ldots+q^n)\\&=(n+1)q^{n+1}-\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\\&=\frac{(n+1)q^{n+2}-(n+2)q^{n+1}+1}{q-1},\end{aligned}$$

de unde rezultă $S=\dfrac{(n+1)q^{n+2}-(n+2)q^{n+1}+1}{(q-1)^2}$. Pentru $q=\dfrac{1}{3}$, obţinem

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{3^k}=\frac{(n+1)(\frac{1}{3})^{n+2}-(n+2)(\frac{1}{3})^{n+1}+1}{(\frac{1}{3}-1)^2},$$

de unde $a_n=\dfrac{9}{4}\left(\dfrac{n+1}{3^{n+2}}-\dfrac{n+2}{3^{n+1}}+1\right)$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{9}{4}$.

17. Fie $f:(-\infty,1)\cup(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+mx+1}{x-1}$. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ astfel încât dreapta $y=x+2$ să fie asimptotă la graficul funcţiei f. **(5 pct.)**

a) $m=\sqrt{2}$; b) $m=-\sqrt{2}$; c) $m=-1$; d) $m=1$; e) $m=2$; f) $m=0$.

Soluţie. Dacă dreapta $y=ax+b$ este asimptotă la graficul funcţiei f pentru $x\to\infty$, atunci $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ şi $b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)$. Prin urmare $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+mx+1}{x(x-1)}=1$ şi

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+mx+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(m+1)x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(m+1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{m+1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=m+1.$$

Rezultă $m+1=2$, de unde $m=1$.

18. Să se calculeze raţia r a unei progresii aritmetice cu $a_1=1$ şi $a_4=7$. **(5 pct.)**

a) $r=6$; b) $r=7$; c) $r=\frac{1}{2}$; d) $r=\sqrt{2}$; e) $r=-2$; f) $r=2$.

Soluţie. Deoarece $a_4=a_1+3r$, avem $7=1+3r$, de unde $r=2$.