Admitere * Universitatea Politehnica din Bucureşti 2010
Disciplina: Algebră şi Elemente de Analiză Matematică
Varianta A

1. Să se rezolve inecuaţia $3^{4-x} \leq 3^x$. **(5 pct.)**

   a) $\emptyset$; b) $x \in [2, \infty)$; c) $x \in \{-1, 1\}$; d) $x \in [0, 2]$; e) $x \in [-1, 1]$; f) $x \in \mathbb{R}$.

   Soluţie. Baza este supraunitară, deci ecuaţia devine $4 - x \leq x \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2, \infty)$.

2. Coordonatele punctului de extrem al funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$ sunt: **(5 pct.)**

   a) $(\mathrm{e}, -\mathrm{e})$; b) $(\frac{1}{\mathrm{e}}, -\frac{1}{\mathrm{e}})$; c) $(1, -1)$; d) $(1, 0)$; e) $(\frac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e})$; f) $(1, 1)$.

   Soluţie. Avem $f'(x) = \ln x + 1$ şi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Deci $f(\frac{1}{\mathrm{e}}) = -\frac{1}{\mathrm{e}}$, iar punctul de extrem este $(\frac{1}{\mathrm{e}}, -\frac{1}{\mathrm{e}})$.

3. Fie $a_1, ..., a_{10}$ o progresie aritmetică cu $a_1 = 10$ şi raţia $r = -3$. Câţi termeni pozitivi are progresia? **(5 pct.)**

   a) 10; b) 2; c) 5; d) 6; e) 4; f) 3.

   Soluţie. Se observă că $a_1 = 10 > a_2 = 7 > a_3 = 4 > a_4 = 1 > a_5 = -2 \geq a_k, k \geq 5$. Deci numărul de termeni pozitivi este 4.

4. Valoarea expresiei $E = \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^7$ este: **(5 pct.)**

   a) i; b) 2i; c) 1; d) $\mathrm{i} + 1$; e) $\mathrm{i} - 1$; f) 0.

   Soluţie. $i^{4k} = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, deci $E = i + i^3 = i(1 + i^2) = i \cdot 0 = 0$.

5. Valoarea integralei $\int_0^1 (3x^2 - 2x)dx$ este: **(5 pct.)**

   a) 0; b) -1; c) 1; d) 2; e) -2; f) $\frac{1}{2}$.

   Soluţie. Integrala devine $\left(x^3 - x^2\right)\Big|_0^1 = (1 - 1) - (0 - 0) = 0$.

6. Derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^x$ este: **(5 pct.)**

   a) $x^2\mathrm{e}^x$; b) e^x; c) $(x + 2)\mathrm{e}^x$; d) $(x + 1)\mathrm{e}^x$; e) 0; f) $x\mathrm{e}^x$.

   Soluţie. $f'(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$.

7. Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} mx + 1, & x < 1 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ este continuă pentru: **(5 pct.)**

   a) $m = 1$; b) $m = 2$; c) $m = -1$; d) $m = -2$; e) $m = \frac{1}{2}$; f) $m = 0$.

   Soluţie. $f_s(1) = m + 1, f_d(1) = f(1) = 0$, iar f este continuă pe $\mathbb{R}$ d.n.d. f este continuă şi în punctul $x = 0$, deci dacă $f_s(1) = f_d(1) = f(1)$. Rezultă că f este continuă pentru $m = -1$.

8. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{vmatrix} = 0$. **(5 pct.)**

   a) $a \in [-1, 1]$; b) $a = 3$; c) $a = -1$; d) $a = 2$; e) $a = -2$; f) $a = 0$.

   Soluţie. Avem $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{vmatrix} = a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

9. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. **(5 pct.)**

   a) 3; b) 2; c) -1; d) 1; e) ∞; f) 0.

   Soluţie. Simplificând fracţia prin $x - 1$, obţinem $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1}(x + 1) = 2$.

10. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Atunci matricea $B = A^2 - A$ este: **(5 pct.)**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$; c) 0_2; d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$.

Soluţie. Prin calcul direct, se obţine

$$B = A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}.$$

11. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^2 - mx + 4 = 0$ să admită soluţie dublă. **(5 pct.)**

a) $m \in [-4, 4]$; b) $m = 0$; c) $m \in \mathbb{R}$; d) $m \in \{-4, 4\}$; e) $m \in \{-2, 2\}$; f) $m = 5$.

Soluţie. Condiţia $\Delta = 0$ se rescrie $(-m)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (m-4)(m+4) = 0 \Leftrightarrow m \in \{\pm 4\}$.

12. Câte perechi distincte $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de numere întregi verifică inegalitatea $x^2 + y^2 \leq 5$? **(5 pct.)**

a) 19; b) 11; c) 8; d) 20; e) 21; f) 13.

Soluţie. Perechile trebuie sa satisfacă relaţiile $0 \leq x^2 \leq 5$, $0 \leq y^2 \leq 5 \Leftrightarrow x, y \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$. Dar x şi y sunt întregi, deci $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Prin verificare directă se constată că din cele 25 de variante posibile, cele care *nu* satisfac inegalitatea sunt cele în care $\{x, y\} \subset \{\pm 2\}$, adică perechile $(\pm 2, \pm 2), (\pm 2, \mp 2)$; prin urmare, rămân $25 - 4 = 21$ variante valide, mai exact

$$\{(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1), (0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0), (0,2), (0,-2), (2,0), (-2,0),$$
$$(1,2), (-1,2), (1,-2), (-1,-2), (2,1), (-2,1), (2,-1), (-2,-1)\}.$$

13. Să se calculeze $x - \frac{1}{x}$ pentru $x = \frac{1}{2}$. **(5 pct.)**

a) $-\frac{1}{2}$; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{3}{2}$; e) -1; f) $\frac{3}{2}$.

Soluţie. Prin calcul direct, obţinem $\frac{1}{2} - \frac{1}{1/2} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$.

14. Să se scrie în ordine crescătoare numerele $2,\ \pi,\ \sqrt{3}$. **(5 pct.)**

a) $\pi,\ 2,\ \sqrt{3}$; b) $\sqrt{3},\ \pi,\ 2$; c) $2,\ \sqrt{3},\ \pi$; d) $\sqrt{3},\ 2,\ \pi$; e) $\pi,\ \sqrt{3},\ 2$; f) $2,\ \pi,\ \sqrt{3}$.

Soluţie. Deoarece, cu eroare de maxim $\varepsilon = 0.1$ avem $\sqrt{3} \simeq 1.7 < 1.8, \pi \simeq 3.14 > 3.1$, rezultă $\sqrt{3} < 1.8 < 2 < 3.1 < \pi$, deci răspunsul este $\sqrt{3}, 2, \pi$.

15. Să se determine domeniul maxim de definiţie D al funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x + 6}$. **(5 pct.)**

a) $[3, \infty)$; b) $[0, \infty)$; c) $(-\infty, -4]$; d) $[-3, 3]$; e) $\mathbb{R}$; f) $[-3, \infty)$.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului este $2x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3 \Leftrightarrow x \,\epsilon\, [-3, \infty)$.

16. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 4x + 3 = 0$. **(5 pct.)**

a) 0; b) 10; c) 12; d) 8; e) 16; f) 9.

Soluţie. Rezolvând ecuaţia, obţinem $\{x_1, x_2\} \in \{(1,3), (3,1)\}$, deci $x_1^2 + x_2^2 = 1^2 + 3^3 = 10$.

Altfel. Folosind relaţiile Viète, avem $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = 3$, deci

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4^2 - 2 \cdot 3 = 16 - 6 = 10.$$

17. Valoarea limitei $l = \lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})$ este: **(5 pct.)**

a) -1; b) limita nu există; c) 1; d) $-\infty$; e) ∞; f) 0.

Soluţie. Raţionalizând diferenţa şi împărţind apoi simultan numărătorul şi numitorul prin n, obţinem

$$l = \lim_{n \to \infty} (\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}) = \lim_{n \to \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{2}{2} = 1.$$

18. Valoarea integralei $I = \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx$ satisface inegalitatea: **(5 pct.)**

a) $I < \frac{1}{\mathrm{e}}$; b) $I < 0,1$; c) $I < \frac{\pi}{10}$; d) $I < 0$; e) $I < \frac{1}{3}$; f) $I < \frac{\pi}{4}$.

Soluţie. Se ştie că $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$, deci pentru $x \geq 0$ avem $e^x \geq 1 + x$. Înlocuim x cu $x^2 \geq 0$ şi obţinem $e^{x^2} \geq 1 + x^2 \Rightarrow e^{-x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$. Deoarece funcţiile din inegalitate sunt continue şi nu coincid pe intervalul $[0,1]$, obţinem inegalitatea strictă

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad I < \frac{\pi}{4}.$$

Altfel. Pentru $x \in [0,1]$, avem $x^2 \leq x \Leftrightarrow -x^2 \geq -x \Rightarrow \mathrm{e}^{-x^2} \geq \mathrm{e}^{-x}$ şi

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, dx = -\mathrm{e}^{-x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}} + 1 = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}},$$

deci integrând inegalitatea de mai sus şi folosind aproximări, rezultă

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \geq \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\, dx = \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}} \geq \frac{2.7-1}{2.8} = \frac{1.7}{2.8} = \frac{17}{28} \geq \frac{4}{7},$$

deci $I \geq \dfrac{4}{7}$. Se observă că au loc inegalităţile

$$\frac{1}{\mathrm{e}} < \frac{4}{7} \ (\Leftrightarrow 7 < 4 \cdot \mathrm{e}) \Rightarrow I > \frac{1}{\mathrm{e}}, \qquad 0.1 < \frac{4}{7} \ (\Leftrightarrow 7 < 40) \Rightarrow I > 0.1$$
$$\frac{\pi}{10} < \frac{4}{7} \ (\Leftrightarrow 7\pi < 40) \Rightarrow I > \frac{\pi}{10}, \quad \frac{1}{3} < \frac{4}{7} \ (\Leftrightarrow 7 < 12) \Rightarrow I > \frac{1}{3}, \quad 0 < \frac{4}{7} \Rightarrow I > 0,$$

deci (conform convenţiei că din şase variante una singură poate fi adevărată), singura variantă validă rămâne $I < \frac{\pi}{4}$.