

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine numerele reale a și b dacă $AB = BA$.

a) $a = 2, b = 0$; b) $a = 1, b = 1$; c) $a = -2, b = 0$; d) $a = 2, b \in \mathbb{R}$; e) $a = 2, b = 2$; f) $a \in \mathbb{R}, b = 0$.

Soluție. Avem $AB = BA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b+4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b+4 = 2a+b$, adică $a = 2, b \in \mathbb{R}$.

2. Să se rezolve ecuația $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

a) 0; b) $\ln 3$; c) 1; d) 0 și 1; e) -1; f) nu are soluții.

Soluție. Notăm $3^x = y$ și avem $y > 0$ și $y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y \in \{1, 3\}$. Atunci $y = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, sau $y = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$. În concluzie $x \in \{0, 1\}$.

3. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$.

a) 1; b) 2; c) 0; d) $\frac{1}{2} \ln 2$; e) -1; f) $\ln 2$.

Soluție. Avem $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$.

4. Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{x} = x$.

a) 1; b) 0; c) 0, 1, i; d) 0, 1; e) 1, -1; f) 0, 1, -1.

Soluție. Prin ridicare la cub obținem $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$.

5. Să se calculeze $C_6^4 + A_5^2$.

a) 35; b) 102; c) 10; d) 15; e) 20; f) 25.

Soluție. Cum $C_6^4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ și $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$, rezultă $C_6^4 + A_5^2 = 35$.

6. Să se determine abscisele punctelor de extrem local ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x$.

a) 0, -1; b) 0, $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$; c) 0; d) 1, -1; e) $\sqrt{3}$; f) 1.

Soluție. Avem $f'(x) = 3x^2 - 3$ și deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. Cum semnul lui f' se schimbă în $x_1 = -1, x_2 = 1$ rezultă că abscisele căutate sunt -1 și 1.

7. Să se așeze în ordine crescătoare numerele 1, $\ln 2$, $\ln 3$, π .

a) $\ln 2, 1, \ln 3, \pi$; b) 1, $\ln 2, \pi, \ln 3$; c) $\ln 2, \ln 3, 1, \pi$; d) 1, $\ln 3, \pi, \ln 2$; e) 1, $\ln 2, \ln 3, \pi$; f) 1, $\pi, \ln 2, \ln 3$.

Soluție. Avem $2 < e < 3 < e^\pi$ și deci logaritmand șirul de inegalități $\ln 2 < 1 < \ln 3 < \pi$.

8. Să se determine m real dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+m, & x \leq 1 \\ m^2x+2, & x > 1 \end{cases}$ este continuă pe \mathbb{R} .

a) 2; b) nu există; c) 0 și 1; d) -1; e) 1; f) 0.

Soluție. Funcția f este continuă pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Continuitatea în $x = 1$ are loc d.n.d. $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 2 + m = \lim_{x \searrow 1} f(x) = m^2 + 2 = f(1) \Leftrightarrow m^2 + 2 = 2 + m \Rightarrow m \in \{0, 1\}$.

9. Să se calculeze $\sqrt{a^2 - b^2}$ pentru $a = 242,5$ și $b = 46,5$.

a) 196; b) $\sqrt{46640}$; c) 240,75; d) 283; e) 238; f) 238,25.

Soluție. Avem $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(242,5 - 46,5)(242,5 + 46,5)} = \sqrt{196 \cdot 289} = \sqrt{14^2 \cdot 17^2} = 238$.

10. Să se determine m real dacă ecuația $x^2 - (m+3)x + m^2 = 0$ are două soluții reale și distincte.

- a) $m \in (-\infty, 3)$; b) $m \in \mathbb{R}$; c) $m = -3$; d) $m \in (3, \infty)$; e) $m \in (-\infty, -1)$; f) $m \in (-1, 3)$.

Soluție. Condiția este $\Delta > 0$ adică

$$(m+3)^2 - 4m^2 > 0 \Leftrightarrow (m+3-2m)(m+3+2m) > 0 \Leftrightarrow m \in (-1, 3).$$

11. Fie funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln(x+1)$. Să se calculeze $f(1) + f'(0)$.

- a) 0; b) $\ln 2$; c) 1; d) $1 + \ln 2$; e) ∞ ; f) $\ln 3$.

Soluție. Cum $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$, rezultă $f'(0) + f(1) = \ln 1 + 0 + \ln 2 = \ln 2$.

12. Să se determine m real dacă $m \cdot \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2 + \ln x} dx = 1$.

- a) $\ln 2$; b) 2; c) 4; d) $\ln \frac{1}{2}$; e) 1; f) 3.

Soluție. Produsul din membrul stâng al relației fiind nenul, rezultă în particular $m \neq 0$. De asemenea, variabila $x \in [1, \sqrt{2}]$ din integrala definită este strict pozitivă. Deoarece $e^{\ln x} = x$, folosind schimbarea de variabilă $y = mx^2$ (definită de o bijecție pentru $x > 0$), rezultă

$$I = m \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2} x dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} e^{mx^2} (mx^2)' dx = \frac{1}{2} e^{mx^2} \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (e^{2m} - e^m),$$

deci, ținând cont de faptul că $e^m > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$, obținem

$$\frac{1}{2} (e^{2m} - e^m) = 1 \Leftrightarrow (e^m)^2 - e^m - 2 = 0 \Leftrightarrow e^m \in \{-1, 2\} \cap (0, \infty) = \{2\} \Leftrightarrow e^m = 2 \Leftrightarrow m = \ln 2.$$

13. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3 + 1^2} + \frac{2^2}{n^3 + 2^2} + \dots + \frac{n^2}{n^3 + n^2} \right).$$

- a) nu există; b) 2; c) 1; d) 0; e) ∞ ; f) $\frac{1}{3}$.

Soluție. Avem $\frac{k^2}{n^3+n^2} \leq \frac{k^2}{n^3+k^2} \leq \frac{k^2}{n^3+1}$ și deci sumând pentru $k \in \{1, \dots, n\}$, rezultă

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n^2)} = \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3+n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+k^2} \leq \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}.$$

Dar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)} = \frac{1}{3},$$

deci conform criteriului cleștelui, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+k^2} = \frac{1}{3}$.

14. Să se rezolve ecuația $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

- a) $-\frac{1}{2}$, 1; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0; d) 1; e) $\frac{1}{2}$, 1; f) $-\frac{1}{2}$, 0.

Soluție. Avem

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+1 & 2x+1 & 2x+1 \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = (2x+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1-x & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (2x+1)(1-x)^2.$$

Deci ecuația se rescrie $(x-1)^2(x+\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$.

15. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}$.

a) $\frac{5}{3}$; b) $-\infty$; c) $\frac{4}{5}$; d) 0; e) $\frac{4}{3}$; f) $-\frac{3}{2}$.

Soluție. Avem $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2(x+1)}{(x-3)^2(x+2)} = \frac{4}{5}$.

16. Să se calculeze valoarea expresiei $E = \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt soluțiile ecuației $x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$.

a) -3; b) -1; c) -6; d) 3; e) 0; f) 1.

Soluție. Observăm că rădăcinile sunt nenule. Folosim relațiile lui Viete: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -2 \end{cases}$.

Rezultă $x_2 + x_3 = 6 - x_1$ și $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = -\frac{1}{2}$. Atunci

$$\begin{aligned} E &= \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3} = \frac{6 - x_1}{x_1} + \frac{6 - x_2}{x_2} + \frac{6 - x_3}{x_3} = \\ &= 6 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) - 3 = 6 \left(-\frac{1}{2} \right) - 3 = -6. \end{aligned}$$

17. Să se determine cea mai mică valoare posibilă a integralei

$$\int_{-1}^1 (x^2 - a - bx)^2 dx \text{ pentru } a, b \text{ reale.}$$

a) $\frac{8}{45}$; b) $\frac{1}{45}$; c) $\frac{4}{5}$; d) 1; e) 8; f) $\frac{5}{4}$.

Soluție.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 (x^4 - 2bx^3 + (b^2 - 2a)x^2 + 2abx + a^2) dx = \frac{2}{5} + \frac{2(b^2 - 2a)}{3} + 2a^2 = \\ &= 2a^2 - \frac{4a}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2b^2}{3} = 2 \left(a - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{2b^2}{3} + \frac{8}{45} \geq \frac{8}{45}, \end{aligned}$$

și deci minimul căutat este $\frac{8}{45}$.

18. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \searrow 0} f^{(n)}(x).$$

a) 2; b) 0; c) e; d) 1; e) $\frac{e^2 + 1}{e}$; f) nu există.

Soluție. Dezvoltăm în serie funcția exponențială¹ $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Rezultă

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^k + (-\sqrt{x})^k}{k!} = 2 \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \dots + \frac{x^n}{(2n)!} + \dots \right),$$

deci $f^{(n)}(x) = 2 \left(\frac{n!}{(2n)!} + \frac{(n+1)n \dots 2}{(2n+2)!} x + \dots \right)$. Trecând la limită după x obținem

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = \frac{2n!}{(2n)!} = \frac{2n!}{(2 \cdot 4 \dots 2n)(1 \cdot 3 \dots (2n-1))} = \frac{2n!}{2^n n! (2n-1)!!} = \frac{1}{2^{n-1} (2n-1)!!}$$

și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) \right) = 0$.

¹Se presupune că elevii cunosc dezvoltarea în serie a funcției exponențiale.